Matematyka A, kolokwium, 5 grudnia 2012, 18:05 – 19:59:59

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\ln\big(\operatorname{tg}(2x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt[5]{\frac{x+3}{x^2-2x+5}}$ **c. (3 pt).** $y=\big(2+\cos(3x)\big)^{1/x}$.

---

2. (4 pt.) Niech $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$. Znaleźć równanie prostej τ_P stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P=\big(p,f(p)\big)$, $|p|<5$.

(6 pt.) Niech $F_r=(4,0)$, $F_\ell=(-4,0)$. Niech $P=\big(4,\frac{9}{5}\big)$. Dowieść, że kąt ostry między prostymi τ_P i F_rP jest równy kątowi ostremu między prostymi τ_P i $F_\ell P$.

---

3. (10 pt.) Znaleźć takie dwie liczby nieujemne, których suma jest równa 165, że iloczyn sześcianu jednej z nich i pierwiastka trzeciego stopnia z kwadratu drugiej był jak największy.

---

4. (3 pt.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie $\frac{\pi}{2}$.

(7 pt.) Obliczyć $f(\frac{\pi}{2})$ oraz pochodną $f'(\frac{\pi}{2})$, jeśli

$$f(x)=\ln(1+\cos x)\cdot\sin(x)\cdot\operatorname{tg}^{12}(\tfrac{x}{3})\cdot\log_{10}\Big(\operatorname{tg}^4(\tfrac{2x}{3})+\sin^4(x)+\cos^4(x)\Big).$$

---

5. (2 pt.) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

(3 pt.) Niech $f(x)=\operatorname{arctg}(2+x)+\operatorname{arctg}(2-x)$. Dowieść, że jeśli $x,y\in\mathbb{R}$ i $x\neq y$, to

$$|f(x)-f(y)|<|y-x|.$$

(3 pt.) Niech $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n-1}+\frac{1}{n+n}$ dla $n=1,2,3\ldots$. Wykazać, że $1>a_{n+1}>a_n$ dla każdej liczby naturalnej n.

(2 pt.) Dowieść, że ciąg o wyrazie $f(a_n)=\operatorname{arctg}(2+a_n)+\operatorname{arctg}(2-a_n)$ ma skończoną granicę $g\in(1,2)$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $\big(\sin(3x^2)\big)'=6x\cos(3x^2)$, $\ln x=\ln x-\ln 1$, $\big(\ln(\cos x)\big)'=-\operatorname{tg}x$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $2>\sqrt{3}$.