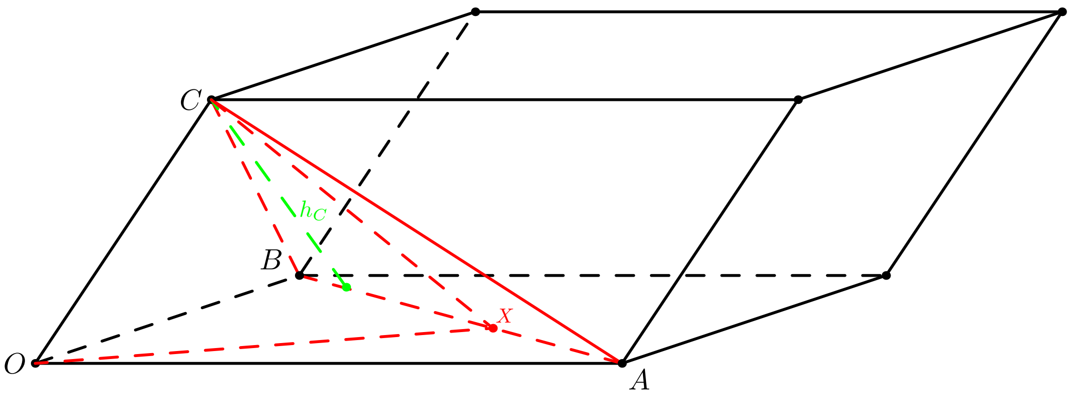
Matematyka A, kolokwium, 31 października 2012, 18:05 – 19:55

Rozwiązanie zadania 5. napisał mgr Michał Przybyłek

1. (2 pt.) Obliczyć objętość czworościanu, którego wierzchołkami są punkty:

$$O=(0,0,0)\,,\quad A=(1,2,2)\,,\quad B=(6,4,-2)\quad \text{oraz}\quad C=(6,11,-6)\,.$$

Rozwiązanie. Objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{OA}=[1,2,2]$, $\overrightarrow{OB}=[6,4,-2]$ i $\overrightarrow{OC}=[6,11,-6]$, to wartość bezwzględna wyznacznika $\begin{vmatrix}1&2&2\\6&4&-2\\6&11&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-8&-14\\0&-1&-18\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}-8&-14\\-1&-18\end{vmatrix}=(-1)(-2)\begin{vmatrix}4&7\\1&18\end{vmatrix}=2(4\cdot 18-7\cdot 1)=130$. Objętość czworościanu to jedna trzecia iloczynu pola podstawy przez wysokość, czworościan i równoległościan mają taką samą wysokość (to odległość punktu A od płaszczyzny OBC), a pole podstawy czworościanu, czyli trójkąta OBC to połowa pola równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, czyli połowa pola podstawy równoległościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, zatem objętość czworościanu jest 6 razy mniejsza od objętości równoległościanu, więc jest równa $\frac{130}{6}=\frac{65}{3}$.



(3 pt.) Znaleźć $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Obliczyć pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie. Mamy $\overrightarrow{AB}=[5,2,-4]$ $\overrightarrow{AC}=[5,9,-8]$, więc $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$

$=\left[\begin{vmatrix}2&-4\\9&-8\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}5&-4\\5&-8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5&2\\5&9\end{vmatrix}\right]=\left[(-4)\begin{vmatrix}2&1\\9&2\end{vmatrix},-5(-4)\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix},5\begin{vmatrix}1&2\\1&9\end{vmatrix}\right]=[20,20,35]$. Stąd wynika, że pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jest równe $\sqrt{20^2+20^2+37^2}=5\sqrt{4^2+4^2+7^2=5\cdot 9}=45$, a pole trójkąta ABC to połowa pola tego równoległoboku, czyli $\frac{45}{2}$.

(1 pt.) Obliczyć odległość punktu C od prostej AB.

Rozwiązanie. Ta odległość to wysokość h_C trójkąta ABC zaczynająca się w wierzchołku C. Długość odcinka AB to $\sqrt{5^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, zatem zachodzi równość

$$h_C=\frac{\text{dwa razy pole}}{\text{długość podstawy}}=\frac{45}{3\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

(2 pt.) Znaleźć punkt X, który dzieli odcinek AB w stosunku $2:3$, tzn. $\frac{AX}{XB}=\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie. $X=A+\frac{2}{2+3}(B-A)=\frac{3}{5}A+\frac{2}{5}B=\frac{1}{5}((3,6,6)+(12,8,-4))=\frac{1}{5}(15,14,2)=\left(3,\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$.

(2 pt.) Znaleźć stosunek objętości czworościanu $OAXC$ do objętości czworościanu $OABC$.

Rozwiązanie. Wysokości obu czworościanów z wierzchołka C są równe, bo przeciwległe temu wierzchołkowi ściany leżą w tej samej płaszczyźnie. Stąd wynika, że stosunek objętości jest równy stosunkowi pól podstaw, czyli trójkątów OAX i OAB. Taki sam argument przekonuje nas o tym, że stosunek tych pół to stosunek długości odcinków AX i AB, czyli $\frac{2}{5}$.

2. (3 pt.) Podać definicję sinusa dowolnego kąta $t > 0$.

Rozwiązanie. Kąt t umieszczamy na płaszczyźnie tak, aby jego wierzchołkiem był punkt $\mathbf{0} = (0,0)$, a pierwszym ramieniem — dodatnia półoś OX, czyli półprosta złożona z punktów postaci $(x,0)$, $x \geq 0$. Sinusem kąta $t > 0$ nazywamy drugą współrzędną punktu, w którym drugie ramię kąta t przecina okrąg jednostkowy.

(3 pt.) Znaleźć kosinus kąta α między wektorami $[2,3,-6]$ i $[2,-1,2]$.

Rozwiązanie. Długości tych wektorów są odpowiednio równe $\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2} = 7$ oraz $\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 3$. Wobec tego $\cos\alpha = \frac{2\cdot 2+3\cdot(-1)+(-6)\cdot 2}{7\cdot 3} = -\frac{11}{21} < -\frac{1}{2} = \cos 120°$.

(1 pt.) Wykazać, że jeśli liczba a jest miarą kąta α w stopniach, to $a > 120°$

Rozwiązanie. Wynika to stąd, że na przedziale $[0°, 180°]$ kosinus maleje wraz ze wzrostem kąta i nierówności $\cos a < \cos 120°$ (por. poprzedni punkt tego zadania).

(3 pt.) Znaleźć $\sin\alpha$. Wykazać, że $\sin\alpha < \sin\frac{\alpha}{2}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $0 < \alpha < \pi$, więc $\sin\alpha > 0$. Stąd i z „jedynki trygonometrycznej" wynika więc równość $\sin\alpha = \sqrt{1-(-\frac{11}{21})^2} = \sqrt{(1-\frac{11}{21})(1+\frac{11}{21})} = \frac{1}{21}\sqrt{10\cdot 32} = \frac{8}{21}\sqrt{5}$. Ponieważ $\alpha > \frac{2\pi}{3}$ a sinus maleje ze wzrostem kąta na przedziale $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{3}\right]$, więc $\sin\alpha < \sin\frac{2\pi}{3}$. Ponieważ $\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$, więc $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$ — punkty $(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3})$ i $(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$ są symetryczne względem osi OY. Z nierówności $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$, wynika, że $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, a z niej nierówność $\sin\frac{\pi}{3} < \sin\frac{\alpha}{2}$, zatem $\sin\alpha < \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} < \sin\frac{\alpha}{2}$.

---

3. (4 pt.) Podać definicję logarytmu liczby t przy podstawie p. Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?

Rozwiązanie. Logarytmem liczby $t > 0$ przy podstawie $p > 0$, $p \neq 1$ nazywamy taką liczbę ℓ, że spełniona jest równość $t = p^\ell$.

(6 pt.) Wykazać, że: $\frac{1}{2} + 2\log 2 + \frac{3}{4}\log 81 < 3\log 7 < 3\log 3 + 7\log 2 - 1$.

Rozwiązanie. Logarytm przy podstawie 10, więc większej od 1, jest funkcją ściśle rosnącą, więc nierównośc podwójna jest równoważna takiej:

$$10^{\frac{1}{2}+2\log 2+\frac{3}{4}\log 81} < 10^{3\log 7} < 10^{3\log 3+7\log 2-1}.$$

czyli nierówności:

$$\sqrt{10}\cdot 4\cdot 27 = \sqrt{10}\cdot 2^2\cdot 81^{3/4} < 7^3 < 3^3\cdot 2^7\cdot\frac{1}{10} = 27\cdot 128\cdot\frac{1}{10}.$$

Mamy $\left(7^3\right)^2 = 343^2 > 342\cdot 344 = (2\cdot 3^2\cdot 19)\cdot(2^3\cdot 43) = 2^4\cdot 3^2\cdot(18+1)\cdot(42+1) = 2^4\cdot 3^2\cdot(18\cdot 42+18+42+1) = 2^4\cdot 3^2\cdot(18\cdot 42+18+2\cdot 18+4+1) > 2^4\cdot 3^2\cdot 18\cdot 45 = 10\cdot 2^4\cdot 3^6$, więc $7^3 > \sqrt{10}\cdot 2^2\cdot 3^3$. Udowodniona została lewa nierówność.

Oczywiście można też było przemnożyć $10\cdot 4^2\cdot 27^2 = 116\,640$ *i stwierdzić, że jest to liczba mniejsza od* $343^2 = 117\,649$ *— co kto lubi.*

Trzeba teraz zająć się prawą nierównością, ale tu nic ciekawego do powiedzenia nie mam: $3^3\cdot 2^7 = 6^3\cdot 2^4 = 216\cdot 16 = 3200+16^2 = 3200+256 = 3456 > 3430 = 7^3\cdot 10$.

---

4. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{2012}}+1{,}01^n+n^2\cdot 0{,}99^n}{1000\sqrt{n}+5\cdot 1{,}01^n+55\cdot 1{,}001^n}\cdot\left(\sqrt{n+10\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}\right)$.

Rozwiązanie. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{2012}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2102} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^{2102} = 1^{2012} = 1$, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, co zostało udowodnione na wykładzie, skorzystałem też z twierdzenia o granicy iloczynu. Stąd, z twierdzenia o granicy ilorazu oraz z równości $\lim\limits_{n\to\infty}1{,}01^n = +\infty$ wynika, że

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2012}}}{1{,}01^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Mamy też

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot 0{,}99^n}{1{,}01^n} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\tfrac{99}{101}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\tfrac{99}{101}}\right)^n\right)^2 = 0^2 = 0\,,$$

bo — jak udowodniłem na wykładzie — $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ dla każdej liczby $q\in(-1,1)$, w rozpatrywanym przypadku $q=\sqrt{\frac{99}{101}}$. Podobnie uzasadniamy równości

$$\lim_{n\to\infty} 1000\,\frac{\sqrt{n}}{1{,}01^n} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} 55\,\frac{1{,}001^n}{1{,}01^n} = 0\,.$$

Wynika stąd, że

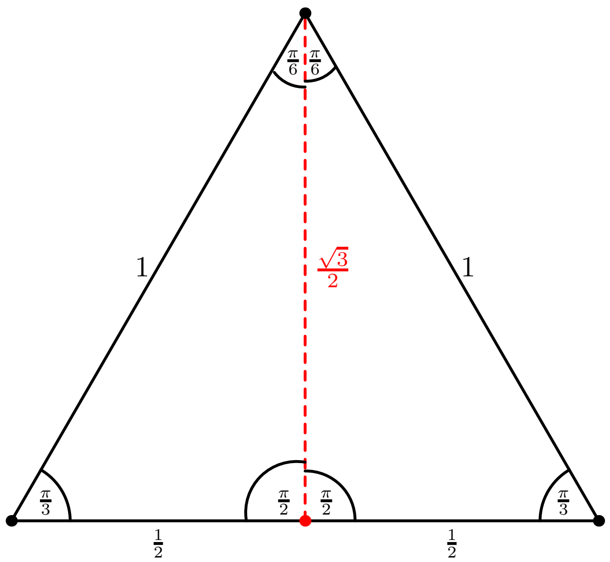
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2012}} + 1{,}01^n + n^2\cdot 0{,}99^n}{1000\sqrt{n} + 5\cdot 1{,}01^n + 55\cdot 1{,}001^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[n]{n^{2012}}}{1{,}01^n} + 1 + \frac{n^2\cdot 0{,}99^n}{1{,}01^n}}{\frac{1000\sqrt{n}}{1{,}01^n} + 5 + 55\cdot\frac{1{,}001^n}{1{,}01^n}} = \frac{1}{5}\,.$$

Mamy też $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+10\sqrt{n}} - \sqrt{n+31} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+10\sqrt{n}}\right)^2 - \left(\sqrt{n+31}\right)^2}{\sqrt{n+10\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+10\sqrt{n}-(n+31)}{\sqrt{n+10\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10\sqrt{n}-31}{\sqrt{n+10\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10-\frac{31}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{10}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{31}{n}}} = \frac{10}{2} = 5$, zatem szukaną granicą jest $\frac{1}{5}\cdot 5 = 1$.

(1 pt.) Narysować trójkąt równoboczny i jego wysokość. Wyrazić w radianach kąty widniejące na zrobionym przez siebie rysunku.

Rozwiązanie.



Zaznaczyłem też długości różnych odcinków, co pozwala zainteresowanym na znalezienie liczb: $\sin\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ itp.

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>k$, to $\sqrt{n+10\sqrt{n}} - \sqrt{n+31} > \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}$?

Rozwiązanie. Mamy $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}} = 4 < 5 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+10\sqrt{n}} - \sqrt{n+31}$. Z definicji granicy ciągu wnioskujemy, że istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że dla każdej liczby naturalnej $n>k$ zachodzi nierówność $\left|\sqrt{n+10\sqrt{n}} - \sqrt{n+31} - 5\right| < 1$ i wobec tego $\sqrt{n+10\sqrt{n}} - \sqrt{n+31} > 5-1 = 4$.

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>k$, to $\sqrt{n+10\sqrt{n}} - \sqrt{n+31} > 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$?

Rozwiązanie. Z równości $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ wynika, że $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$, a ponieważ zachodzi nierówność $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27 > 25 = 5^2$, więc $3\sqrt{3} > 5$, czyli $\varepsilon := 3\sqrt{3}-5 > 0$. Z definicji granicy wynika więc istnienie takiej liczby naturalnej n_ε, że dla każdej liczby naturalnej $n > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność

$\left|\sqrt{n+10\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}-5\right|<n_\varepsilon$, zatem również $\sqrt{n+10\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}<5+n_\varepsilon=3\sqrt{3}$. Wobec tego liczba k nie istnieje: od pewnego momentu zachodzi nierówność przeciwna do znajdującej się w treści zadania.

---

5. (2 pt.) Niech $a_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}$ dla $n=4,5,6\ldots$. Obliczyć a_4, a_5 i a_6.

Rozwiązanie. Obliczamy a_4,a_5,a_6. Ale *najpierw* zastanawiamy się ile składników znajduje się w sumie a_n — pierwszy składnik to $2n$, a ostatni to $3n-1$ stąd składników mamy

$$3n-1-2n=n-1 \textit{ plus} \text{ jeden,}$$

bo wliczamy oba końce przedziału. Czyli składników mamy n. Teraz wypisujemy a_4,a_5,a_6:
$a_4=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$,
$a_5=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}$,
$a_6=\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}$.
Kończymy nie widząc zbyt głębokiego sensu dalszego przekształcania tych wyrażeń.

(3 pt.) Dla jakich liczb naturalnych $n\geq 4$ zachodzi nierówność $a_n>a_{n+1}$, a dla jakich nierówność $a_n\leq a_{n+1}$?

Rozwiązanie. Kolejne polecenie jest pytaniem o monotoniczność ciągu a_n, oczywiście dla tych n, dla których ciąg został zdefiniowany. Mamy

$$a_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)+1}+\frac{1}{2(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{3(n+1)-1}=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}+\ldots+\frac{1}{3n+2}.$$

Odejmując a_{n+1} od a_n dostajemy: $\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$.

Chcemy zbadać nierówność: $\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)>0$ czy też równoważnie:

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}.$$

Składnik $\frac{1}{2n+1}$ sprawia, że lewa strona jest trochę mniejsza niż $\frac{1}{n}$. Niestety prawa też jest nieco mniejsza od $\frac{1}{n}$, bo $\frac{1}{3n}>\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{3n+2}$ i $3\frac{1}{3n}=\frac{1}{n}$. Sensowne za to wydaje się przeszacowanie środkowego składnika po prawej stronie średnią skrajnych — wystarczy uświadomić sobie, że: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}>\frac{1}{x}$, o ile $x>1$, czyli gdy $x-\frac{1}{x}>0$ (podstawiliśmy $x=\frac{1}{3n+1}$).

Wystarczy zatem udowodnić nierówność:

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}>\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1\frac{1}{3}},$$

która jest spełniona, bo $2n+1>2n+1\frac{1}{3}$. Wobec tego ciąg (a_n) jest monotonicznie malejący.
Można postąpić standardowo, czyli sprowadzić cały ułamek „na jedną kreskę" ułamkową:

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}=\frac{1}{6n}+\frac{(3n+1)(3n+2)-(2n+1)(3n+1+3n+2)}{(2n+1)(3n+1)(3n+2)}=$$

$$=\frac{1}{6n}+\frac{9n^2+9n+2-(12n^2+12n+3)}{(2n+1)(9n^2+9n+2)}=\frac{1}{6n}-\frac{3n^2+3n+1}{18n^3+27n^2+13n+2}=\frac{9n^2+7n+2}{6n(18n^3+27n^2+13n+2)}$$

po czym „rozwiązać" nierówność:

$$\frac{9n^2+7n+2}{6n(18n^3+27n^2+13n+2)}>0,$$

która jest spełniona dla każdej liczby naturalnej n. Ale tego, niestety, nie udało się poprawnie zrobić żadnemu studentowi podczas kolokwium.

(2 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 4$ zachodzi nierówność $\frac{1}{2}>a_n>\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. Mamy teraz udowodnić, że dla każdego $n\geq 4$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{2}>a_n>\frac{1}{3}.$$

Ponieważ ciąg jest, jak to udowodniliśmy wcześniej, malejący, więc

$$\tfrac{1}{2} > a_4 > a_5 > a_6 > \ldots,$$

a stąd wynika natychmiast, że $\frac{1}{2} > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Najmniejszym składnikiem sumy: $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1}$ jest jej ostatni wyraz, $\frac{1}{3n-1}$.

Wobec tego $a_n > n \cdot \frac{1}{3n-1} = \dfrac{1}{3 - \frac{1}{n}} > \frac{1}{3}$.

(3 pt.) Wykazać, że $\frac{1}{2} > \lim\limits_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{3}$.

Można próbować oszacowania składników wyrazu ciągu. Niestety szacowanie każdego składnika a_n przez najmniejszy z nich, czyli przez $\frac{1}{3n-1}$ jest zbyt niedokładne, aby otrzymać ostre szacowanie granicy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ z dołu. Można jednak można rozdzielić sumę a_{2n} na dwie połówki:

$$a_{4n} = \left(\frac{1}{4n} + \ldots + \frac{1}{5n-1}\right) + \left(\frac{1}{5n} + \ldots + \frac{1}{6n-1}\right)$$

Obie sumy szacujemy z dołu przez najmniejsze elementy pomnożone przez ich liczbę. Otrzymujemy:

$$a_{2n} = \left(\tfrac{1}{4n} + \ldots + \tfrac{1}{5n-1}\right) + \left(\tfrac{1}{5n} + \ldots + \tfrac{1}{6n-1}\right) > \tfrac{n}{5n-1} + \tfrac{n}{6n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} > \tfrac{1}{3}.$$

Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} > \frac{1}{3}$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{3}$.

Uwaga. Gdybyśmy wiedzieli więcej, moglibyśmy uzyskać nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{3}$ nieco inaczej. Z wykładu wiadomo, że : $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ dla $x > -1$. Stąd wynika, że

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \le \ln(1+\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n}.$$

Rozważmy dwa ciągi o wyrazach
$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ i $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$ Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, więc jeśli jeden z nich ma granicę, to drugi też i to taką samą. Mamy

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) > 0$,
zatem ciąg (b_n) jest ściśle rosnący. Ma więc granicę, być może równą $+\infty$. Podobnie

$$c_{n+1} - c_n = \tfrac{1}{n+2} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \tfrac{1}{n+2} - \ln(1 + \tfrac{1}{n+1}) < 0,$$

więc ciąg (c_n) maleje, ma zatem granicę skończoną albo równą $-\infty$. Stąd wynika, że wspólną granicą ciągów (b_n) i (c_n) jest liczba rzeczywista (zwana stałą Eulera). Niech $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n+1} + \cdots + \tfrac{1}{3n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\big(b_{3n-1} + \ln(3n) - b_{2n-1} + \ln(2n)\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\big(b_{3n-1} - b_{2n-1} + \ln(\tfrac{3n}{2n})\big) = \gamma - \gamma + \ln\tfrac{3}{2} = \ln\tfrac{3}{2} = \ln(1 + \tfrac{1}{2}) > \tfrac{1}{3}.$$

Wobec tego wszystkie wyrazy ciągu **malejącego** (a_n) są większe od $\frac{1}{3}$ Udowodniliśmy w ten sposób nieco inaczej zarówno istninie granicy jak i nierówność. Trudno jednak oczekiwać by student, który nigdy nie widział nierówności wiążących sumę postaci $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot + \frac{1}{n}$ z liczbą $\ln n$ wpadł na taki pomysł w czasie sprawdzianu. Pokazaliśmy to rozumowanie, bo uważamy je za interesujące.