Matematyka A, kolokwium, 31 października 2012, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (2 pt.) Obliczyć objętość czworościanu, którego wierzchołkami są punkty:
$O=(0,0,0)$, $A=(1,2,2)$, $B=(6,4,-2)$ oraz $C=(6,11,-6)$.

(3 pt.) Znaleźć $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Obliczyć pole trójkąta ABC.

(1 pt.) Obliczyć odległość punktu C od prostej AB.

(2 pt.) Znaleźć punkt X, który dzieli odcinek AB w stosunku $2:3$, tzn. $\frac{AX}{XB}=\frac{2}{3}$.

(2 pt.) Znaleźć stosunek objętości czworościanu $OAXC$ do objętości czworościanu $OABC$.

---

2. (3 pt.) Podać definicję sinusa dowolnego kąta $t>0$.

(3 pt.) Znaleźć kosinus kąta α między wektorami $[2,3,-6]$ i $[2,-1,2]$.

(1 pt.) Wykazać, że jeśli liczba a jest miarą kąta α w stopniach, to $a>120°$

(3 pt.) Znaleźć $\sin\alpha$. Wykazać, że $\sin\alpha<\sin\frac{\alpha}{2}$.

---

3. (4 pt.) Podać definicję logarytmu liczby t przy podstawie p. Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?

(6 pt.) Wykazać, że: $\frac{1}{2}+2\log 2+\frac{3}{4}\log 81<3\log 7<3\log 3+7\log 2-1$.

---

4. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{2012}}+1{,}01^n+n^2\cdot 0{,}99^n}{1000\sqrt{n}+5\cdot 1{,}01^n+55\cdot 1{,}001^n}\cdot\left(\sqrt{n+10\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}\right)$.

(1 pt.) Narysować trójkąt równoboczny i jego wysokość. Wyrazić w radianach kąty widniejące na zrobionym przez siebie rysunku.

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>k$, to $\sqrt{n+10\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}>\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}$?

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>k$, to $\sqrt{n+10\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}>3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$?

---

5. (2 pt.) Niech $a_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}$ dla $n=4,5,6\ldots$. Obliczyć a_4, a_5 i a_6.

(3 pt.) Dla jakich liczb naturalnych $n\geq 4$ zachodzi nierówność $a_n>a_{n+1}$, a dla jakich nierówność $a_n\leq a_{n+1}$?

(2 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 4$ zachodzi nierówność $\frac{1}{2}>a_n>\frac{1}{3}$.

(3 pt.) Wykazać, że $\frac{1}{2}>\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\frac{1}{3}$.