Matematyka A, egzamin poprawkowy, 5 września 2012, 10:05 — 13:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (1 pt.) Niech $f\colon(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ oznacza funkcję różniczkowalną. Znaleźć pochodną funkcji $\ln f$.

(1 pt.) Napisać wzór na pole obszaru „pod wykresem” funkcji f ograniczonej do przedziału $(0,x)$.

(3 pt.) Znaleźć wzór na pole trójkąta prostokątnego, którego wierzchołkami są punkty $(x,f(x))$, $(x,0)$ oraz punkt, w którym styczna do wykresu w punkcie $(x,f(x))$ przecina oś OX.

(5 pt.) Znaleźć wszystkie takie dodatnie, niemalejące funkcje wypukłe $f\colon(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$, że styczna do wykresu w punkcie $(x,f(x))$ dzieli na połowy pole pod wykresem funkcji ograniczonej do przedziału $(0,x)$, czyli pole zbioru $\{(t,y):\quad 0<t<x \text{ oraz } 0<y<f(t)\}$.

---

2. Niech $M=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&5&1\\-9&-9&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(1 pt.) Znaleźć iloczyny $M\cdot\mathbf{v}$ i $M\cdot\mathbf{w}$.

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$.

(3 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

---

3. (5 pt.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $z^8+64z^2=0$.

(2 pt.) Zaznaczyć wszystkie znalezione w poprzednim punkcie liczby na płaszczyźnie.

---

4. (2 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-6x'(t)+25x(t)=0\,.$$

(7 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-6x'(t)+25x(t)=676te^{-3t}+16te^{3t}+8e^{3t}(\cos 4t+\sin 4t)+219\sin 4t\,.$$

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t)-6x'(t)+25x(t)=676te^{-3t}+16te^{3t}+8e^{3t}(\cos 4t+\sin 4t)+219\sin 4t,\\ x(0)=11\\ x'(0)=12\end{cases}$$

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-6x'(t)+25x(t)=e^{3t}(\cos(4t))^{-3}\,.$$

---

5. Niech $f(x,y)=(x^2+y^2-13)(2x-3y)$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}=2(x^2+y^2-13)+2x(2x-3y)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=-3(x^2+y^2-13)+2y(2x-3y)$.

(1 pt.) Znaleźć gradient funkcji $x-8y$ w punkcie $(3,2)$.

(4 pt.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y):\quad x^2+y^2\le 13\}$.

(4 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kwadracie $\{(x,y):\quad |x|,|y|\le 3\}$.