Matematyka A, egzamin, 25 czerwca 2012, 10:05 — 13:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (7 pt.) Znaleźć wszystkie takie niemalejące funkcje $f\colon(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$, których wykres dzieli każdy prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i o przekątnej OX, gdzie $O=(0,0)$, $X=\big(x,f(x)\big)$, $x>0$ na dwie części, których stosunek pól jest równy $\frac{1}{3}$. Rozpatrzyć oba przypadki.

(3 pt.) Znaleźć środek masy dolnej części prostokąta, jeśli $f(2)=8$ oraz $X=(2,8)$.

---

2. Niech $M=\begin{pmatrix}2&3&-9\\0&5&-9\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}a\\4\\1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

(1 pt.) Znaleźć iloczyny $M\cdot\mathbf{v}$ i $M\cdot\mathbf{w}$.

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$.

(3 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}7\\4\\1\end{pmatrix}$.

---

3. (5 pt.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $z^8+16z^4+256=0$.

(2 pt.) Zaznaczyć wszystkie znalezione w poprzednim punkcie liczby na płaszczyźnie.

---

4. (2 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)+6x'(t)+10x(t)=0.$$

(7 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)+6x'(t)+10x(t)=1369t\left(e^{3t}+e^{-3t}\right)+78\cos t+78e^{-3t}\cos t-325\big(\cos(3t)+\sin(3t)\big).$$

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases}x''(t)+6x'(t)+10x(t)=1369t\left(e^{3t}+e^{-3t}\right)+78\big(1+e^{-3t}\big)\cos t-325\big(\cos(3t)+\sin(3t)\big),\\ x(0)=11\\ x'(0)=1317\end{cases}$$

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)+6x'(t)+10x(t)=e^{-3t}\ln(\sin t).$$

---

5. Niech $f(x,y)=(x^2+y^2-65)(x-8y)$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2-65+2x(x-8y)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=-8(x^2+y^2-65)+2y(x-8y)$.

(1 pt.) Znaleźć gradient funkcji $x-8y$ w punkcie $(8,1)$.

(4 pt.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y):\quad x^2+y^2\le 65\}$.

(4 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kwadracie $\{(x,y):\quad |x|,|y|\le 9\}$.