

Matematyka A, kolokwium dodatkowe, 9 maja 2012, 17:05 – 19:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (3 pt.) Udowodnić, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b istnieje taka para liczb wymiernych

$$x, y, \text{ że zachodzi równość: } \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \text{ Jakie liczby dodatnie mogą być}$$

mianownikami liczb x, y zapisanych w postaci ułamków nieskracalnych?

(2 pt.) Znaleźć wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) Znaleźć macierz $\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ i jej wartości oraz wektory własne.

(2 pt.) Czy istnieje taki niezerowy wektor \vec{v} , że $\|A\vec{v}\| = \frac{1}{3}\|\vec{v}\|$?

(1 pt.) Czy istnieje taki niezerowy wektor \vec{v} , że $\|A\vec{v}\| = 333\|\vec{v}\|$?

2. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A .

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1} .

(2 pt.) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^4, A^8 i macierzy A^{2008} .

(2 pt.) Znaleźć macierze A^8 i A^{2008} .

(2 pt.) Niech A^T będzie macierzą transponowaną do A . Obliczyć $A \cdot A^T$.

3. Niech $M = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 \\ -1 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2 pt.) Obliczyć $M \cdot \mathbf{v}$.

(3 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M .

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^3 .

(3 pt.) Znaleźć macierze M^{-3} i M^{2011} .

4. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) + x(t) = (x(t))^3$ oraz takie rozwiązanie szczególne x , że $x(1) = -1$.
-

5. (10 pt.) Znaleźć wszystkie takie **dodatnie** funkcje f zmiennej $x \in (0, \infty)$, że pozioma współrzędna punktu, w którym styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x, f(x))$ przecina oś OX jest równa $\frac{x}{3}$.
-