

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (7 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = -4 \operatorname{tg} t x(t) + 8 \operatorname{tg} t (2 + \cos^2 t)$ na przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(3 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego $\begin{cases} x'(t) = -4 \operatorname{tg} t x(t) + 8 \operatorname{tg} t (2 + \cos^2 t), \\ x(\frac{\pi}{4}) = 7. \end{cases}$

2. (1 pt.) Rozwiązać równanie $\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 4x'(t) - 21x(t) = 0$.

- (8 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 4x'(t) - 21x(t) = (300t^2 - 1)e^{7t} + 24e^{3t} - 174 \cos 3t.$$

3. Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1 pt.) Znaleźć iloczyn $M \cdot \mathbf{v}$.

- (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$.

- (1 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (3 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. (3 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 6x'(t) + 25x(t) = 0.$$

- (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 6x'(t) + 25x(t) = 600e^{-3t} \cos(4t) + 600e^{3t} \cos(4t) + 600e^{-3t} + 600.$$

- (2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 25x(t) = 600e^{-3t} \cos(4t) + 600e^{3t} \cos(4t) + 600e^{-3t} + 600, \\ x(0) = 60, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

5. (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0.$$

- (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = \frac{1}{t+1} e^{-3t}.$$