Matematyka A, kolokwium dodatkowe, 9 maja 2012, 17:05 – 19:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (3 pt.) Udowodnić, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b istnieje taka para liczb wymiernych x, y, że zachodzi równość: $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Jakie liczby dodatnie mogą być mianownikami liczb x, y zapisanych w postaci ułamków nieskracalnych?

(2 pt.) Znaleźć wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) Znaleźć macierz $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ i jej wartości oraz wektory własne.

(2 pt.) Czy istnieje taki niezerowy wektor $\vec{\mathbf{v}}$, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = \frac{1}{3}\|\vec{\mathbf{v}}\|$?

(1 pt.) Czy istnieje taki niezerowy wektor $\vec{\mathbf{v}}$, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = 333\|\vec{\mathbf{v}}\|$?

---

2. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

(2 pt.) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^4, A^8 i macierzy A^{2008}.

(2 pt.) Znaleźć macierze A^8 i A^{2008}.

(2 pt.) Niech A^T będzie macierzą transponową do A. Obliczyć $A \cdot A^T$.

---

3. Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2 pt.) Obliczyć $M \cdot \mathbf{v}$.

(3 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^8.

(3 pt.) Znaleźć macierze M^{-3} i M^{2009}.

---

4. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = 2\sin^2 t \cdot \big(x(t)\big)^2$ i takie rozwiązanie x, że $x(\pi) = 0$.

---

5. (10 pt.) Znaleźć wszystkie takie **dodatnie** funkcje f zmiennej $x \in (0, \infty)$, których wartość $f(x)$ w punkcie x pomnożona przez x równa jest odległości punktu $(0,0)$ od punktu, w którym styczna do wykresu w punkcie $\big(x, f(x)\big)$ przecina oś OY.
