

Matematyka A, kolokwium, 27 kwietnia 2012, 16:05 – 18:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (3 pt.) Udowodnić, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b istnieje taka para liczb całkowitych

$$x, y, \text{ że zachodzi równość: } \begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

- (2 pt.) Znaleźć wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$.

- (2 pt.) Znaleźć macierz $\begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}^{-1}$ i jej wartości oraz wektory własne.

- (2 pt.) Czy istnieje taki niezerowy wektor \vec{v} , że $\|A\vec{v}\| = 33\|\vec{v}\|$?

- (1 pt.) Czy istnieje taki niezerowy wektor \vec{v} , że $\|A\vec{v}\| = 333\|\vec{v}\|$?
-

2. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

- (2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A .

- (2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1} .

- (2 pt.) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^3 i macierzy A^{2012} .

- (2 pt.) Znaleźć macierze A^3 i A^{2012} .

- (2 pt.) Niech $F(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \vec{x}$. Czy F jest symetrią lub obrotem?
-

3. Niech $M = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -2 & -2 + 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 - \sqrt{2} & -1 & -1 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (2 pt.) Obliczyć $M \cdot \mathbf{v}$.

- (3 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M .

- (2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^8 .

- (3 pt.) Znaleźć macierze M^{-8} i M^{2009} .
-

4. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = \sin t \cdot x(t)^2$ i takie rozwiązanie x , że $x(0) = 0$.
-

5. (10 pt.) Duży garnek świeżo ugotowanej zupy o temperaturze $100^\circ C$ chłodzony jest w bieżącej wodzie o temperaturze $5^\circ C$; zupa jest mieszana, więc można przyjąć, że jej temperatura jest taka sama we wszystkich punktach garnka. W ciągu 10 minut temperatura zupy obniżona została do $60^\circ C$. W jakim czasie garnek ostygnie do temperatury $20^\circ C$?

Wiadomo, że obowiązuje prawo stygnięcia Newtona: „szybkość zmniejszania się temperatury układu jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy układem a otoczeniem.”
