

Matematyka A, kolokwium, 23 marca 2012, 16:05 — 17:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. Niech $f(x) = 2 \ln(4 - x^2)$ dla $x \in [0, 1]$.

(5 pt.) Znaleźć długość wykresu funkcji f .

(5 pt.) Znaleźć odległość środka masy tego wykresu od osi OY .

Zakładamy, że masa jest rozłożona równomiernie, tzn. że jest masa dowolnego łuku jest proporcjonalna do jego długości

2. (10 pt.) Rozwiązać równanie $z^7 + 8z^4 + 4z^3 + 32 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

3. (10 pt.) Dla jakiej liczby $a > 0$ objętości brył powstałych w wyniku obrotu wykresu funkcji $y = x^2$, $0 \leq x \leq a$, wokół osi OX i wokół osi OY są równe?

4. (10 pt.) Obliczyć pole powierzchni, która powstała w wyniku obrotu o kąt 2π wykresu funkcji $y = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 2)^3}$, $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{8}$ wokół osi OY .

5. (10 pt.) Obliczyć $((\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))^{18}$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, $4^3 = 64$, $5^2 = 25$, $6^3 = 216$, $7^2 = 49$, $8^3 = 512$, $9^2 = 81$, $10^3 = 1000$, $11^2 = 121$, $12^3 = 1728$, $13^2 = 169$, $14^3 = 2744$, $15^2 = 225$, $16^3 = 4096$, $17^2 = 289$, $18^3 = 5832$, $19^2 = 361$, $20^3 = 8000$, $21^2 = 441$, $22^3 = 10648$, $23^2 = 529$, $24^3 = 13824$, $25^2 = 625$, $26^3 = 17576$, $27^2 = 729$, $28^3 = 21952$, $29^2 = 841$, $30^3 = 27000$, $31^2 = 961$, $32^3 = 32768$, $33^2 = 1089$, $34^3 = 39304$, $35^2 = 1225$, $36^3 = 46656$, $37^2 = 1369$, $38^3 = 54872$, $39^2 = 1521$, $40^3 = 64000$, $41^2 = 1681$, $42^3 = 74088$, $43^2 = 1849$, $44^3 = 85184$, $45^2 = 2025$, $46^3 = 97336$, $47^2 = 2209$, $48^3 = 110688$, $49^2 = 2401$, $50^3 = 125000$, $51^2 = 2601$, $52^3 = 140608$, $53^2 = 2809$, $54^3 = 157464$, $55^2 = 3025$, $56^3 = 175616$, $57^2 = 3249$, $58^3 = 195112$, $59^2 = 3481$, $60^3 = 216000$, $61^2 = 3721$, $62^3 = 238328$, $63^2 = 3969$, $64^3 = 262144$, $65^2 = 4225$, $66^3 = 287496$, $67^2 = 4489$, $68^3 = 314432$, $69^2 = 4761$, $70^3 = 343000$, $71^2 = 5041$, $72^3 = 373248$, $73^2 = 5329$, $74^3 = 405224$, $75^2 = 5625$, $76^3 = 438976$, $77^2 = 5929$, $78^3 = 474552$, $79^2 = 6241$, $80^3 = 512000$, $81^2 = 6561$, $82^3 = 551768$, $83^2 = 6889$, $84^3 = 592704$, $85^2 = 7225$, $86^3 = 636536$, $87^2 = 7569$, $88^3 = 681472$, $89^2 = 7921$, $90^3 = 729000$, $91^2 = 8281$, $92^3 = 781024$, $93^2 = 8649$, $94^3 = 830688$, $95^2 = 9025$, $96^3 = 884736$, $97^2 = 9409$, $98^3 = 941192$, $99^2 = 9801$, $100^3 = 1000000$.

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.