Matematyka A, egzamin poprawkowy, 31 stycznia 2012, 13:05 – 16:00

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_d b$ pamiętając o założeniach o d i b.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x-2)+\log_{10}(x+9)+\frac{1}{2}\log_{10}0{,}25 = 1+\frac{1}{4}\log_{10}81-\log_{10}(x+2)$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta.

4 pt. Rozwiązać nierówność $8\sin^4 t - 6\sin^2 t + 1 < 0$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. 10 pt. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez proste $x=0$, $x=1$ oraz wykresy funkcji $y = x\cdot 2^x$, $y=\frac{x-1}{x+1}$.

---

4. Niech $f(x) = x^{2/3}(1-x)^{4/3}(x^2+1)^{-2/3}$. Zachodzą wtedy równości:

$f'(x) = \frac{2}{3}(-1+3x+x^2+x^3)x^{-1/3}(1-x)^{1/3}(x^2+1)^{-5/3}$,

$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+6x+7x^2-32x^3+7x^4+2x^5+x^6)x^{-4/3}(1-x)^{-2/3}(x^2+1)^{-8/3}$.

Wielomian $-1+3x+x^2+x^3$ ma jeden pierwiastek: $x_1 \approx 0{,}3$, jest on pojedynczy, a wielomian $1+6x+7x^2-32x^3+7x^4+2x^5+x^6$ ma dwa pierwiastki: $x_2\approx 0{,}69$ i $x_3 \approx 1{,}86$, oba pojedyncze.

2 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f''(1)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

3 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)\cdot(\sin x - x)\cdot\cos(\sin(x^2))\cdot(\sqrt{36+x}-6)}{\mathrm{tg}^2\, x\cdot(\sqrt{1-x^2}-\cos x)\cdot 2^{\cos(3x)-\mathrm{tg}\, x}}$.

---

6. Niech $A=(0,0,3)$, $B=(1,0,1)$, $\mathbf{v}=[2,1,2]$, $\mathbf{w}=[0,1,1]$.

2 pt. Znaleźć iloczyn $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$.

2 pt. Znaleźć równania płaszczyzn π_A i π_B przechodzących odpowiednio przez punkty A i B równoległych do obu wektorów $\mathbf{v},\mathbf{w}$.

2 pt. Obliczyć kosinus kąta między wektorami $\mathbf{w}\times\mathbf{v}$ i $[0,0,1]$

2 pt. Obliczyć odległość płaszczyzny π_A od płaszczyzny π_B.

1 pt. Znaleźć zbiór złożony ze wszystkich punktów wspólnych prostej ℓ_A przechodzącej przez punkt A i równoległej do wektora $\mathbf{v}$ oraz prostej ℓ_B przechodzącej przez punkt B i równoległej do wektora $\mathbf{w}$.

1 pt. Znaleźć najmniejszą z liczb $\|X-Y\|$, gdzie $X\in\ell_A$, $Y\in\ell_B$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad(\cos x)' = -\sin x$,

$\mathrm{tg}\, x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$, $\quad\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$.