Matematyka A, egzamin, 31 stycznia 2012, 10:05 – 12:59:30

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

Przed pomnożeniem liczb zastanowić się nad celem takiej operacji!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_b d$ pamiętając o założeniach o d i b.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x+3) + \log_{10}(x-3) - \frac{5}{3}\log_{10} 8 = 4\log_{10}\sqrt{3} - \log_{10}(13-x)$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta.

4 pt. Rozwiązać nierówność $3\,\mathrm{tg}^4\, t - 10\,\mathrm{tg}^2\, t + 3 < 0$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. 10 pt. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez proste $y = -1$, $x = 1$, $x = 3$ oraz wykres funkcji $y = 32x^3 e^{4x^2}$.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{e^{-3x} - e^{-9x}}$. Zachodzą wtedy równości:

$$f'(x) = e^{-3x}(3 - e^{6x})(e^{6x} - 1)^{-2/3}, \quad f''(x) = e^{-3x}(9 - 18e^{6x} + e^{12x})(e^{6x} - 1)^{-5/3}.$$

$\ln 3 \approx 1{,}10$. Funkcja $9 - 18e^{6x} + e^{12x}$ ma dwa pierwiastki: $x_1 \approx -0{,}11$ i $x_2 \approx 0{,}48$.

2 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f''(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

3 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)\cdot(\mathrm{tg}\, x - x)\cdot\cos(\sin x)\cdot(\sqrt{64+x} - 8)}{\sin^2 x\cdot\left(\sqrt{1 - \mathrm{tg}(x^2)} - \cos x\right)\cdot 2^{\sin(3x) - \mathrm{tg}\, x}}$.

---

6. Niech $A = (0,0,3)$, $B = (1,0,1)$, $\mathbf{v} = [2,-1,2]$, $\mathbf{w} = [0,-1,1]$.

2 pt. Znaleźć iloczyn $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$.

2 pt. Znaleźć równania płaszczyzn π_A i π_B przechodzących odpowiednio przez punkty A i B równoległych do obu wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

2 pt. Obliczyć kosinus kąta między wektorami $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ i $[0,0,1]$

2 pt. Obliczyć odległość płaszczyzny π_A od płaszczyzny π_B.

1 pt. Znaleźć zbiór złożony ze wszystkich punktów wspólnych prostej ℓ_A przechodzącej przez punkt A i równoległej do wektora $\mathbf{v}$ oraz prostej ℓ_B przechodzącej przez punkt B i równoległej do wektora $\mathbf{w}$.

1 pt. Znaleźć najmniejszą z liczb $\|X - Y\|$, gdzie $X \in \ell_A$, $y \in \ell_B$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad \big(\cos x\big)' = -\sin x$,

$\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$. Iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty.