Matematyka A, kolokwium, 14 stycznia 2012, 9:05 – 10:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (6 pt.) Wykazać, że niezależnie od wyboru liczb $a, b \in \mathbb{R}$ równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty i co nawyżej trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

(1 pt.) Wskazać parę liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

(1 pt.) Wskazać parę liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste.

(2 pt.) Wskazać parę liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.

---

2. (10 pt.) Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)(\operatorname{tg} x - x)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2\cos(x^{2012})}$.

---

3. Wykazać, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $0 < x < \delta$ wynika nierówność

$$x \cdot \sqrt[3]{1 - \tfrac{x^2}{2}} < \sin x .$$

---

4. Niech $\varphi(x) = x(2x^2-1)^{9/7}(x^2-1)^{-9/7}$ dla $x \neq \pm 1$. Wiadomo, że jeśli $x^2 \notin \{1, \frac{1}{2}\}$, to zachodzą wzory $\varphi'(x) = \frac{1}{7}(2x^2-1)^{2/7}(x^2-1)^{-16/7}(14x^4 - 39x^2 + 7)$ oraz
$\varphi''(x) = \frac{18}{49}x(14x^4 + 39x^2 - 21)(x^2-1)^{-23/7}(2x^2-1)^{-5/7}$.

Wiadomo też, że $14x^4 - 39x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \approx -1{,}610,\ x = x_2 \approx -0{,}439,\ x = x_3 \approx 0{,}439$ lub $x = x_4 \approx 1{,}610$ i $14x^4 + 39x^2 - 21 = 0 \Leftrightarrow x = x_5 \approx -0{,}680$ albo $x = x_6 \approx 0{,}680$.

(1 pt.) Znaleźć $\varphi'(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ oraz $\varphi'(\frac{1}{\sqrt{2}})$ lub wykazać, że te pochodne nie istnieją.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ rośnie i te, na których maleje.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji φ.

(1 pt.) Wykazać, że jeśli $13 < s < t$, to $\varphi\big(\frac{4}{7}s + \frac{3}{7}t\big) < \frac{4}{7}\varphi(s) + \frac{3}{7}\varphi(t)$.

(4 pt.) W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji φ.

---

5. (10 pt.) Na wykresie funkcji $y = \frac{1}{9}x^3 - 3x$ znaleźć punkt leżący najbliżej punktu $(-15, -5)$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad \big(\cos x\big)' = -\sin x$,

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$.