Matematyka A, kolokwium, 30 listopada 2010, Rozwiązania

1. (10 pt.) Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\operatorname{tg}\big(\ln(2x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt[3]{\frac{x+4}{x^2-x+4}}$ **c. (3 pt).** $y=(2+\sin x)^{1/x}$.

Rozwiązanie

a. Korzystamy z wzoru na pochodną złożenia: $\big(\operatorname{tg}\big(\ln(2x)\big)\big)'=\frac{1}{\cos^2(\ln(2x))}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x\cos^2(\ln(2x))}$.

b. $\left(\sqrt[3]{\frac{x+4}{x^2-x+4}}\right)'=\left(\left(\frac{x+4}{x^2-x+4}\right)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{x+4}{x^2-x+4}\right)^{-2/3}\cdot\frac{x^2-x+4-(x+4)(2x-1)}{(x^2-x+4)^2}=$

$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-x+4}{x+4}\right)^2}\cdot\frac{-x^2-8x+8}{(x^2-x+4)^2}=\frac{-x^2-8x+8}{3(x+4)^{2/3}(x^2-x+4)^{4/3}}=\frac{1}{3}(-x^2-8x+8)(x+4)^{-2/3}(x^2-x+4)^{-4/3}$ — zapisałem wynik w kilku postaciach, bo często wygodnie jest zapisać go w pewnej postaci, aby coś z nim dalej robić. To oczywiście konieczne nie było.

c. $y'=\left((2+\sin x)^{1/x}\right)'=\left(e^{(1/x)\ln(2+\sin x)}\right)'=e^{(1/x)\ln(2+\sin x)}\left(\frac{-1}{x^2}\ln(2+\sin x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2+\sin x}\cdot\cos x\right)=$

$=(2+\sin x)^{1/x}\left(\frac{-\ln(2+\sin x)}{x^2}+\frac{\cos x}{x(2+\sin x)}\right)=(2+\sin x)^{(\frac{1}{x}-1)}\cdot\frac{x\cos x-\ln(2+\sin x)}{x^2}$.

---

2. (4 pt.) Niech $f(x)=\sqrt{(x+a)^2+x^2-9}-\sqrt{(x-a)^2+x^2-9}$. Znaleźć taką liczbę $a>0$, że dla każdego $x>3$ zachodzi równość $f'(x)=0$.

(2 pt.) Niech P będzie punktem leżącym na wykresie funkcji $y=\sqrt{x^2-9}$, którego pierwszą współrzędną jest liczba 5. Znaleźć równanie prostej τ_P stycznej do wykresu funkcji $y=\sqrt{x^2-9}$ w punkcie P.

(4 pt.) Niech $F_r=(3\sqrt{2},0)$, $F_\ell=(-3\sqrt{2},0)$. Dowieść, że dwusieczną kąta $F_\ell PF_r$ jest prosta τ_P.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną pamiętając o tym, że a jest stałą, a x — zmienną:

$\left(\sqrt{(x+a)^2+x^2-9}-\sqrt{(x-a)^2+x^2-9}\right)'=$

$=\frac{1}{2}\big((x+a)^2+x^2-9\big)^{-1/2}(2x+2a+2x)-\frac{1}{2}\big((x-a)^2+x^2-9\big)^{-1/2}(2x-2a+2x)$

$=\big((x+a)^2+x^2-9\big)^{-1/2}(2x+a)-\big((x-a)^2+x^2-9\big)^{-1/2}(2x-a)$.

Jeśli to wyrażenie jest równe 0, dla pewnego x, to (przenosimy jedno wyrażenie na drugą stronę, mnożymy przez mianowniki i podnosimy do kwadratu obie strony otrzymanej równości):

$\big((x-a)^2+x^2-9\big)(2x+a)^2=\big((x+a)^2+x^2-9\big)(2x-a)^2$, stąd

$(x-a)^2(2x+a)^2+(x^2-9)(2x+a)^2=(x+a)^2(2x-a)^2+(x^2-9)(2x-a)^2$, więc

$\big((x-a)(2x+a)\big)^2-\big((x+a)(2x-a)\big)^2=(x^2-9)\big((2x-a)^2-(2x+a)^2\big)$, zatem

$\big(2x^2-ax-a^2\big)^2-\big(2x^2+ax-a^2\big)^2=(x^2-9)(-2a)(4x)$ i w końcu, po następnym zapisaniu różnicy kwadratów w postaci iloczynu, otrzymujemy $(-2ax)\big(4x^2-2a^2\big)=(x^2-9)(-2a)(4x)$. Ponieważ $ax\neq 0$, więc $2x^2-a^2=2x^2-18$, tzn. $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Mamy $\sqrt{(x+a)^2+x^2-9}=\sqrt{(x+3\sqrt{2})^2+x^2-9}=\sqrt{2x^2+6\sqrt{2}+9}=\sqrt{(x\sqrt{2}+3)^2}=x\sqrt{2}+3$, bo $x\sqrt{2}+3>0$. Analogicznie $\sqrt{(x-a)^2+x^2-9}=\sqrt{(x-3\sqrt{2})^2+x^2-9}=\sqrt{2x^2-6\sqrt{2}+9}=$ $=\sqrt{(x\sqrt{2}-3)^2}=x\sqrt{2}-3$, bo $x\sqrt{2}-3>0$. Stąd wynika, że dla $a=3\sqrt{2}$ i $x>3$ zachodzi równość $\sqrt{(x+a)^2+x^2-9}-\sqrt{(x-a)^2+x^2-9}=x\sqrt{2}+3-(x\sqrt{2}-3)=6$. Pochodna funkcji stałej jest równa 0.

Jeśli $x=5$, to $y=\sqrt{25-9}=4$, zatem $P=(5,4)$. Mamy $y'=\frac{1}{2}(x^2-9)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$. Wobec tego współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $\sqrt{x^2-9}$ w punkcie P jest równy $\frac{5}{4}$, więc równanie stycznej do wykresu w punkcie P to: $y=\frac{5}{4}(x-5)+4$.

Wektor $\mathbf{v}=[4,5]$ jest styczny do tego wykresu — ma taki sam współczynnik kierunkowy, jak styczna w tym punkcie. Mamy też $[F_\ell,P]=[5+3\sqrt{2},4]$ oraz $[F_r,P]=[5-3\sqrt{2},4]$. Długości tych trzech wektorów są równe kolejno:

$$\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},\qquad \sqrt{(5+3\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{59+30\sqrt{2}},\qquad \sqrt{(5-3\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{59-30\sqrt{2}}.$$

Dla wykazania równości kątów wystarczy wykazać, że ich kosinusy są równe (kąt między wektorami nie jest większy od π radianów). Wykażemy, że

$$\frac{\mathbf{v}\cdot[F_\ell,P]}{\|\mathbf{v}\|\cdot\|[F_\ell,P]\|}=\frac{\mathbf{v}\cdot[F_r,P]}{\|\mathbf{v}\|\cdot\|[F_r,P]\|},$$

czyli $(\mathbf{v}\cdot[F_\ell,P])\cdot\|[F_r,P]\|=(\mathbf{v}\cdot[F_r,P])\cdot\|[F_\ell,P]\|$. Mamy $\mathbf{v}\cdot[F_\ell,P]=4\cdot(5+3\sqrt{2})+5\cdot 4=40+12\sqrt{2}$ oraz $\mathbf{v}\cdot[F_r,P]=4\cdot(5-3\sqrt{2})+5\cdot 4=40-12\sqrt{2}>0$. Możemy napisać:

$$(40+12\sqrt{2})\sqrt{59-30\sqrt{2}}=(40-12\sqrt{2})\sqrt{59+30\sqrt{2}}\iff$$
$$\iff(10+3\sqrt{2})\sqrt{59-30\sqrt{2}}=(10-3\sqrt{2})\sqrt{59+30\sqrt{2}}\iff$$
$$\iff(10+3\sqrt{2})^2(59-30\sqrt{2})=(10-3\sqrt{2})^2(59+30\sqrt{2})\iff$$
$$\iff(118+60\sqrt{2})(59-30\sqrt{2})=(118-60\sqrt{2})(59+30\sqrt{2})\iff$$
$$\iff(59+30\sqrt{2})(59-30\sqrt{2})=(59-30\sqrt{2})(59+30\sqrt{2}).$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc wszystkie poprzednie również.

---

3. (4 pt.) Niech $f(x)=x^3-x$ dla $x\in[-1,2]$ (poza przedziałem $[-1,2]$ funkcja nie jest zdefiniowana). Niech $A=\big(-1,f(-1)\big)$, $B=\big(2,f(2)\big)$, $X=\big(x,f(x)\big)$. Wyrazić pole trójkąta AXB wzorem, w zależności od x.

(6 pt.) Dla jakiego $x\in[-1,2]$ pole trójkąta AXB jest największe?

Rozwiązanie

Mamy $f(-1)=0$, $f(2)=6$, zatem $[A,X]=[x+1,x^3-x]$, $[B,X]=[x-2,x^3-x-6]$. Pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $[A,X]$ i $[B,X]$ to wartość bezwzględna wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x^3-x \\ x-2 & x^3-x-6 \end{vmatrix}=(x+1)(x^3-x-6)-(x^3-x)(x-2)=\big(x+1-(x-2)\big)(x^3-x)-6(x+1)=$$

$=3(x^3-x-2x-2)=3(x^3-3x-2)=3(x+1)(x^2-x-2)=3(x+1)^2(x-2)$. Wynika stąd, że dla $x\in[-1,2]$ pole trójkąta AXB jest równe $\frac{3}{2}(x+1)^2(2-x)$ — połowa pola równoległoboku. Dla x spoza przedziału $[-1,2]$ pole równe jest $\frac{3}{2}(x+1)^2(-2+x)$.

Rozważamy funkcję $\frac{3}{2}(x+1)^2(2-x)$ na przedziale $[-1,2]$. Ma ona największą wartość w pewnym punkcie (twierdzenie Weierstrassa). Ponieważ w punktach wewnętrznych jest dodatnia, a w końcach przedziału jest równa 0, więc największą wartość przyjmuje w pewnym punkcie wewnętrznym. Jej pochodna w tym punkcie musi być równa 0. Mamy $\left(\frac{3}{2}(x+1)^2(2-x)\right)'=3(x+1)(2-x)-\frac{3}{2}(x+1)^2=$ $=\frac{3}{2}(x+1)(4-2x-x-1)=\frac{3}{2}(x+1)(3-3x)=\frac{9}{2}(x+1)(1-x)$, zatem jedynym punktem **wewnętrznym** przedziału $[-1,2]$, w którym pochodna zeruje się, jest 1. Największa wartość jest w nim przyjmowana i jest równa $\frac{3}{2}\cdot 2^2=6$ (o tę liczbę w zadaniu nie pytano). Dodajmy jeszcze, że współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$ jest równy 2, więc ta styczna jest równoległa do wektora $[A,B]=[3,6]$.

---

4. **(3 pt.)** Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p.

(7 pt.) Obliczyć $f(1)$ oraz pochodną $f'(1)$, jeśli

$$f(x)=\ln x\cdot\sin\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\cdot(1+\ln x)^3\cdot\operatorname{tg}^{11}\tfrac{\pi x}{4}\cdot\log_{10}\Big(190+(2+x^{11})^4+(x^{30}+8)^3\Big).$$

Rozwiązanie

Pochodną funkcji f w punkcie p nazywamy granicę $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$.

$f(1)=0$, bo $\ln 1=0$. Ponieważ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, więc $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=\frac{1}{1}=1$.

Obliczamy $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to1}(1+\ln x)^3\cdot\lim\limits_{x\to1}\operatorname{tg}^{11}\frac{\pi x}{4}\cdot$

$\cdot\lim\limits_{x\to1}\log_{10}\Big(190+(2+x^{11})^4+(x^{30}+8)^3\Big)=1\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot(1+0)^3\cdot\operatorname{tg}^{11}\frac{\pi}{4}\cdot\log_{10}\big(190+(2+1)^4+(1+8)^3\big)=$

$=\log(190+81+729)=\log_{10}1000=3$.

---

5. **(3 pt.)** Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

(3 pt.) Wykazać, że jeśli $y>x>1000$, to $0<\ln y-\ln x<\frac{y-x}{1000}$.

(4 pt.) Wykazać, że jeśli $y>x>1000$, to

$$1999(y-x)<\tfrac{1}{y}(1+y^2)^{3/2}-\tfrac{1}{x}(1+x^2)^{3/2}<2000(y-x).$$

Rozwiązanie

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a,b]$ i ma pochodną we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b), to istnieje taki punkt $c\in(a,b)$, że $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Niech $f(x)=\ln x$. Mamy $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Jeśli $y>x>1000$, to istnieje taka liczba $c\in(x,y)$, że $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)=\frac{1}{c}(y-x)<\frac{y-x}{1000}$, bo $c>1000$.

Niech $\varphi(x)=\frac{1}{x}(1+x^2)^{3/2}=x^{-1}(1+x^2)^{3/2}$. Mamy $\varphi'(x)=-x^{-2}(1+x^2)^{3/2}+x^{-1}\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}\cdot2x=$

$=-\frac{1}{x^2}(1+x^2)^{3/2}+3(1+x^2)^{1/2}=(1+x^2)^{1/2}\big(3-\frac{1+x^2}{x^2}\big)=(1+x^2)^{1/2}\big(2-\frac{1}{x^2}\big)$. Jeśli $x>1000$, to $\varphi'(x)=(1+x^2)^{1/2}\big(2-\frac{1}{x^2}\big)>(1\,000\,001)^{1/2}\cdot1{,}999\,999>(1\,000\,000)^{1/2}\cdot1{,}999\,999=1\,999{,}999>1\,999$.

Wobec tego, jeśli $y>x>1000$, to dla pewnego $c\in(x,y)$ zachodzi wzór

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\varphi'(c)(y-x)>1{,}999(y-x),$$

bo oczywiście $c>1000$.

Prawa nierówność jest na ogół nieprawdziwa. Jeśli np. $y>x>10\,000$, i $c\in(x,y)$, to $c>10\,000$, więc $\varphi'(c)=(1+c^2)^{1/2}\big(2-\frac{1}{c^2}\big)>(1+c^2)^{1/2}>c>10\,000$, więc $\varphi(y)-\varphi(x)>10\,000(y-x)$, przy czym w rzeczywistości ta różnica jest jeszcze większa (skorzystaliśmy z tego, że liczba $2-\frac{1}{c^2}$ jest większa od 1, a ona jest prawie równa 2).

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $\big(\sin(3x^2)\big)'=6x\cos(3x^2)$, $\ln x=\ln x-\ln 1$,

$\big(\ln(\cos x)\big)'=-\operatorname{tg}x$.