Matematyka A, kolokwium, 30 listopada 2010, 18:05 – 19:59:59

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\operatorname{tg}\big(\ln(2x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt[3]{\frac{x+4}{x^2-x+4}}$ **c. (3 pt).** $y=(2+\sin x)^{1/x}$.

---

2. (4 pt.) Niech $f(x)=\sqrt{(x+a)^2+x^2-9}-\sqrt{(x-a)^2+x^2-9}$. Znaleźć taką liczbę $a>0$, że dla każdego $x>3$ zachodzi równość $f'(x)=0$.

(2 pt.) Niech P będzie punktem leżącym na wykresie funkcji $y=\sqrt{x^2-9}$, którego pierwszą współrzędną jest liczba 5. Znaleźć równanie prostej τ_P stycznej do wykresu funkcji $y=\sqrt{x^2-9}$ w punkcie P.

(4 pt.) Niech $F_r=(3\sqrt{2},0)$, $F_\ell=(-3\sqrt{2},0)$. Dowieść, że dwusieczną kąta $F_\ell P F_r$ jest prosta τ_P.

---

3. (4 pt.) Niech $f(x)=x^3-x$ dla $x\in[-1,2]$ (poza przedziałem $[-1,2]$ funkcja nie jest zdefiniowana). Niech $A=\big(-1,f(-1)\big)$, $B=\big(2,f(2)\big)$, $X=\big(x,f(x)\big)$. Wyrazić pole trójkąta AXB wzorem, w zależności od x.

(6 pt.) Dla jakiego $x\in[-1,2]$ pole trójkąta AXB jest największe?

---

4. (3 pt.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p.

(7 pt.) Obliczyć $f(1)$ oraz pochodną $f'(1)$, jeśli

$$f(x)=\ln x\cdot\sin\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\cdot(1+\ln x)^3\cdot\operatorname{tg}^{11}\tfrac{\pi x}{4}\cdot\log_{10}\Big(190+(2+x^{11})^4+(x^{30}+8)^3\Big).$$

---

5. (3 pt.) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

(3 pt.) Wykazać, że jeśli $y>x>1000$, to $0<\ln y-\ln x<\frac{y-x}{1000}$.

(4 pt.) Wykazać, że jeśli $y>x>1000$, to

$$1999(y-x)<\tfrac{1}{y}(1+y^2)^{3/2}-\tfrac{1}{x}(1+x^2)^{3/2}<2000(y-x).$$

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $\big(\sin(3x^2)\big)'=6x\cos(3x^2)$, $\ln x=\ln x-\ln 1$, $\big(\ln(\cos x)\big)'=-\operatorname{tg}x$.