

Matematyka A, kolokwium, 2 listopada 2011, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (4 pt.) Dla jakich liczb rzeczywistych x zachodzi równość $\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & -3x & x^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$?
- (2 pt.) Obliczyć objętość czworościanu, którego wierzchołkami są punkty: $(0, 0, 0)$, $(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(2, -6, 4)$ oraz $(1, 1, 0)$.
- (2 pt.) Dla jakich liczb rzeczywistych x wektor $[2, -3x, x^2]$ jest prostopadły do iloczynu wektorowego $[2, 2, 0] \times [0, -7, -7]$?
- (2 pt.) Znaleźć punkt X , który dzieli odcinek o końcach $A = (3, 3, 7)$, $B = (-2, -2, -8)$, w stosunku $2 : 3$, tzn. $\frac{AX}{XB} = \frac{2}{3}$.
-
2. (3 pt.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta $t > 0$.
- (3 pt.) Znaleźć kosinus kąta α między wektorami $[1, -2, -2]$ i $[-4, -1, 8]$.
- (2 pt.) Niech $\beta = \pi - \alpha$. Znaleźć $\sin \beta$. Wykazać, że $\beta > \frac{2}{3}$.
- (2 pt.) Wykazać, że jeśli liczba b jest miarą kąta β w stopniach, to $b > 45^\circ$.
-
3. (4 pt.) Podać definicję logarytmu liczby x przy podstawie c . Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?
- (6 pt.) Wykazać, że: $2 \log 5 + \log 13 + 3 \log 2 < \frac{2}{3} \log 27 + 2 \log 17 < \log 3 + 3 \log 5 + \log 7$.
-
4. (6 pt.) Znaleźć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{2112011} + 1, 01^n + 4 \cdot 0,99^n} \cdot (\sqrt{n + 12\sqrt{n}} - \sqrt{n + 13})$.
- (2 pt.) Ile stopni ma kąt γ , który ma $\frac{\pi}{3}$ radiana? Znaleźć wysokość trójkąta równobocznego o boku 1.
- (2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > k$, to $\sqrt{n + 12\sqrt{n}} - \sqrt{n + 13} > 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$?
-
5. (2 pt.) Niech $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Obliczyć a_1 , a_2 i a_3 .
- (3 pt.) Dla jakich liczb $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n > a_{n+1}$, a dla jakich nierówność $a_n \leq a_{n+1}$?
- (2 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $1 \geq a_n > \frac{1}{2}$.
- (3 pt.) Wykazać, że $1 > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \frac{1}{2}$.
-