Matematyka A, egzamin, 8 września 2011, 12:05 – 15:00

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 2 pt. Naszkicować obszar $D = \{(x,y)\colon\ -\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}\ \text{ i }\ \sin x \le y \le \cos x\}$.

8 pt. Znaleźć środek masy obszaru D przyjmując, że jest on jednorodny.

---

2. 4 pt. Przez każdy punkt (x_0, y_0), którego obie współrzędne są dodatnie przechodzi dokładnie jedna parabola o równaniu $y = ax^2$. Wyznaczyć współczynnik kierunkowy stycznej do tej paraboli w punkcie (x_0, y_0) w zależności od x_0 i y_0.

6 pt. Znaleźć wszystkie takie dodatnie funkcje różniczkowalne f, określone na przedziałach postaci $(0, c)$, że jeśli $y_0 = f(x_0)$, to styczna do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) jest prostopadła do stycznej do paraboli o rówaniu $y = ax^2$ w punkcie (x_0, y_0).

---

3. 7 pt. Rozwiązać równanie $x''(t) + 9x(t) = 18(e^{3t} + 2t)\cos(3t) + 8\sin t + 9(e^{3t} - 4t)\sin(3t)$.

3 pt. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania x

$$x''(t) + 9x(t) = 18(e^{3t} + 2t)\cos(3t) + 8\sin t + 9(e^{3t} - 4t)\sin(3t),$$

dla których $x(0) = \frac{1}{2}$.

---

4. 2 pt. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7 pt. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = \ \ x(t) - 2y(t) + 3e^{3t}\cdot\cos(3t), \\ y'(t) = 2x(t) + 5y(t) - 3e^{3t}\cdot\cos(3t). \end{cases}$

---

5. Niech $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1$.

2 pt. Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

5 pt. Wyjaśnić, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których — lokalne minima, a w których siodła.

3 pt. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kole $K = \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \le 4\}$.

---

6. Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(4 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M oraz kąty między wektorami własnymi.

(6 pt.) Niech $f(x,y,z) = (x\quad y\quad z)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, jeśli $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Znaleźć najmniejszą i największą z liczb $f(x,y,z)$.

Uwaga: jeśli $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{R}^3$ *są punktami, które nie leżą w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez* $\mathbf{0} = (0,0,0)$, *to dla każdego wektora* $\mathbf{v}$ *istnieją takie liczby* c_1, c_2, c_3, *że* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, *gdzie* $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{[\mathbf{0}, \mathbf{p}_1]}$.