Matematyka A, egzamin, 17 czerwca 2011, 12:35 – 15:30

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 4 pt. Znaleźć środek masy jednorodnego półkola $K = \{(x,y)\colon\quad 0 \le x \ \text{ i } \ 0 \le x^2+y^2 \le 100\}$.

6 pt. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D = \{(x,y)\colon\quad 0 \le y \ \text{ i } \ 1 \le x^2+y^2 \le 25\}$.

---

2. 10 pt. Znaleźć wszystkie takie różniczkowalne funkcje, których wykres leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, że dla każdej liczby $x_0 > 0$ styczna w punkcie $\big(x_0, f(x_0)\big)$ do wykresu funkcji f przecina oś OX w punkcie $A(x_0)$ a oś OY w punkcie $B(x_0)$, przy czym punkt $A(x_0)$ jest środkiem odcinka o końcach $\big(x_0, f(x_0)\big)$ i $B(x_0)$.

---

3. 7 pt. Rozwiązać równanie $\quad x''(t) + 4x(t) = 60\cos t + 60\cos(2t) + 60\cos(3t) + 16e^{2t}\cos(2t)$.

2 pt. Znaleźć wszystkie ograniczone rozwiązania równania

$$x''(t) + 4x(t) = 60\cos t + 60\cos(2t) + 60\cos(3t),$$

tj. te rozwiązania, dla których istnieje taka liczba $M \ge 0$, że $|x(t)| \le M$ dla każdej liczby rzeczywistej t.

1 pt. Znaleźć wszystkie ograniczone rozwiązania równania $\quad x''(t) + 4x(t) = 60\cos(3t)$.

---

4. 7 pt. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + e^{4t}\cdot\sin t, \\ y'(t) = x(t) + 5y(t) - e^{4t}\cdot\sin t. \end{cases} \tag{4}$$

2 pt. Znaleźć rozwiązanie układu (4) spełniające warunki $x(0) = -2$ i $y(0) = 2$.

1 pt. Znaleźć rozwiązanie układu (4) spełniające warunki $x(0) = 0 = y(0)$.

---

5. Niech $f(x,y) = 8y^2 + 6x^2y - x^3y$.

2 pt. Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

5 pt. Wyjaśnić, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których — lokalne minima, a w których siodła.

3 pt. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w prostokącie

$$R = \{(x,y)\colon\quad -1 \le x \le 6, -3 \le y \le 1\}.$$

---

6. Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(4 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M oraz kąty między wektorami własnymi.

(6 pt.) Niech $f(x,y,z) = (x \quad y \quad z)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, jeśli $x^2+y^2+z^2 = 2$.

Znaleźć najmniejszą i największą z liczb $f(x,y,z)$.

Uwaga: jeśli $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{R}^3$ *są punktami, które nie leżą w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez* $\mathbf{0} = (0,0,0)$, *to dla każdego wektora* $\mathbf{v}$ *istnieją takie liczby* c_1, c_2, c_3, *że* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, *gdzie* $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{[\mathbf{0}, \mathbf{p}_1]}$.