Matematyka A, egzamin, 17 czerwca 2011, 12:35 – 15:30

Tekst poprawiony 22 czerwca 2011, godz 23:29

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. Na końcu apel autora tekstu.

Mam nadzieję, że błędów jest niewiele, jeśli ktoś coś zauważy, proszę o zawiadomienie, poprawię.

1. 4 pt. Znaleźć środek masy jednorodnego półkola $K = \{(x,y)\colon \quad 0 \le x \text{ i } 0 \le x^2+y^2 \le 100\}$.

Rozwiązanie. Pole półkola to oczywiście $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 10^2 = 50\pi$. Jeśli ktoś nie pamięta wzoru na kole koła, może obliczyć całkę $\int_0^{10}\big(\sqrt{100-x^2}-(-\sqrt{100-x^2}\,\big)\,dx = 2\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx \xlongequal[dx=10\cos t\,dt]{x=10\sin t}$ $= 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{100-100\sin^2 t}\cdot 10\cdot\cos t\,dt = 200\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 100\int_0^{\pi/2}\big(1+\cos(2t)\big)\,dt =$ $= 100\big(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\big)\Big|_0^{\pi/2} = 100\big(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-0-\frac{1}{2}\sin 0\big) = 50\pi$, ale jednak wzór na pole koła każda osoba, która jest w stanie zapamiętać swoje imię i nazwisko, powinna pamiętać.

Ze względu na symetrię względem osi OX, druga współrzędna środka masy półkola jest równa 0. Aby znaleźć pierwszą obliczymy całkę $\int_0^{10} x\big(\sqrt{100-x^2}-(-\sqrt{100-x^2}\,\big)\,dx$, którą następnie podzielimy przez pole półkola — czyli znajdziemy średnią ważoną pierwszej współrzędnej (czyli x), a wagą jest długość pionowego odcinka złożonego z punktów, których pierwszą współrzędną jest liczba x. Mamy więc: $\int_0^{10} x\big(\sqrt{100-x^2}-(-\sqrt{100-x^2}\,\big)\,dx = \int_0^{10} 2x\sqrt{100-x^2}\,dx =$ $= -\frac{2}{3}(100-x^2)^{3/2}\Big|_0^{10} = \frac{2}{3}\big(-0+100^{3/2}\big) = \frac{2}{3}\sqrt{100}^{\,3} = \frac{2}{3}10^3 = \frac{2000}{3}$. Wobec tego pierwsza współrzędna środka ciężkości jest równa $\frac{2000}{3\cdot 50\cdot\pi} = \frac{40}{3\pi} = \frac{4}{3\pi}\cdot 10$. Poszukiwanyn środekiem ciężkości jest punkt $\big(\frac{40}{3\pi},0\big)$.

Jasne jest, że jeśli koło o promieniu 10 zastąpimy tak samo położonym kołem o promieniu $r>0$, to środkiem ciężkości półkola będzie punkt $\big(\frac{4}{3\pi}r,0\big)$. ■

6 pt. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D = \{(x,y)\colon \quad 0 \le y \text{ i } 1 \le x^2+y^2 \le 25\}$.

Rozwiązanie. Z tego, co wykazaliśmy w pierwszej części tego zadania, wynika, że środkiem ciężkości półkola $P_5 := \{(x,y)\colon \quad 0 \le y,\ 0 \le x^2+y^2 \le 25\}$ jest punkt $(0,\frac{4}{3\pi}\cdot 5) = (0,\frac{20}{3\pi})$ — zmieniliśmy role współrzędnych. Środkiem ciężkości półkola $P_1 := \{(x,y)\colon \quad 0 \le y,\ 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$ jest punkt $(0,\frac{4}{3\pi})$. Półkole P_5 składa się z półkola P_1 i z obszaru D. Jasne jest (symetria), że środek ciężkości obszaru D znajduje się na osi OY. Oznaczmy jego drugą współrzędną literą d. Wtedy środek półkola P_5 jest średnią ważoną punktów $(0,d)$ i $(0,\frac{4}{3\pi})$, a wagami są $\frac{25}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi = 12\pi$ (czyli pole obszaru) D oraz $\frac{1}{2}\pi$ (czyli pole półkola P_1). Mamy więc równość

$$(0,\tfrac{20}{3\pi}) = \frac{12\pi}{(25/2)\cdot\pi}(0,d) + \frac{\pi/2}{(25/2)\cdot\pi}(0,\tfrac{4}{3\pi}) = \frac{24}{25}(0,d)+\frac{1}{25}(0,\tfrac{4}{3\pi}).$$

Z tej równości wynika, że $\frac{20}{3\pi} = \frac{24}{25}\cdot d+\frac{1}{25}\cdot\frac{4}{3\pi}$. Mamy więc $d = \frac{25}{24}\big(\frac{20}{3\pi}-\frac{1}{25}\cdot\frac{4}{3\pi}\big) = \frac{124}{24}\cdot\frac{4}{3\pi} = \frac{62}{9\pi}$. Wobec tego środkiem ciężkości obszaru D jest punkt $\big(0,\frac{62}{9\pi}\big)$.

Zadanie jest rozwiązane. A teraz coś dla miłośników podstawianie do gotowych wzorów, które zapamiętali na egzamin i chcą o nich możliwie szybko zapomnieć. Niech

$$f(x) = \sqrt{25-x^2},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } -5 \le x \le -1, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{gdy } -1 \le x \le 1, \\ 0 & \text{gdy } 1 \le x \le 5. \end{cases}$$

Wtedy obszar D można opisać tak: $D = \{(x,y)\colon \quad -5 \le x \le 5,\ g(x) \le y \le f(x)$. Wtedy pole obszaru D równe jest $\int_{g(x)}^{f(x)}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int_{-5}^{-1}\sqrt{25-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1}\big(\sqrt{25-x^2}-\sqrt{1-x^2}\big) +$ $+\int_1^5\sqrt{25-x^2}\,dx = \int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx - \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \text{rachuneczki}\ldots = \frac{25\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 12\pi$ — skorzystałem tu z równości $\int_{-5}^{-1}\ldots+\int_{-1}^{1}\ldots+\int_{1}^{5}\ldots=\int_{-5}^{5}\ldots$. W liczniku natomiast pojawi się całka $\int_{-5}^{5}\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)\big((f(x)-g(x)\big)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-5}^{5}\big(f(x)^2-g(x)^2\big)\,dx$. Znów przedział $[-5,5]$ rozbijamy na trzy mniejsze i obliczamy bez trudu całkę z wielomianu, pierwiastki znikają, bo podnosiliśmy do kwadratu. Dodajmy jeszcze, że liczba $\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)$ to druga współrzędna środka ciężkości pionowego odcinka o końcach $\big(x,g(x)\big)$ i $\big(x,f(x)\big)$, więc iloraz $\frac{\int_{-5}^{5}\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)\big((f(x)-g(x)\big)\,dx}{\int_{-5}^{5}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx}$ to średnia ważona liczb $\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)$, czyli drugich współrzędnych środków ciężkości pionowych odcinków, a wagami są długości odcinków.

To jeszcze nie koniec uwag. Można też patrzeć na zbiór D ,,z punktu widzenia osi OY. Przekroje tego zbioru prostymi prostopadłymi do osi OY są odcinkami (na wysokości $y\geq 1$) lub sumami dwóch rozłącznych odcinków (na wysokości $y<1$. Należy więc znaleźć średnią ważoną współrzędnej $y\in[0,5]$ a wagą ma być liczba $2\sqrt{25-y^2}$ dla $y\geq 1$, a dla $y<1$ — liczba $2\big(\sqrt{25-y^2}-\sqrt{1-y^2}\big)$. Należy więc obliczyć całkę $\int_0^1 2y\big(\sqrt{25-y^2}-\sqrt{1-y^2}\big)\,dy+$ $+\int_1^5 2y\sqrt{25-y^2}\,dy$, a następnie podzielić ją przez pole obszaru D Jest to łatwe, bo zachodzi wzór $2y\sqrt{a^2-y^2}=\frac{d}{dy}\big(-\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{3/2}\big)$ — pochodna funkcji złożonej. Znów nie kończymy tych obliczeń zostawiając to studentom.

Zauważmy na zakończenie, że $\frac{62}{9\pi}>\frac{60}{9\pi}=\frac{=20}{3\pi}$, więc wynik jest zgodny z przewidywaniem: środek ciężkości obszaru D leży trochę wyżej niż środek ciężkości półkola P_5. Tak jest, bo usunęliśmy P_1 z ,,cięższej'' strony P_5, by otrzymać D.

---

2. 10 pt. Znaleźć wszystkie takie różniczkowalne funkcje, których wykres leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, że dla każdej liczby $x_0>0$ styczna w punkcie $\big(x_0,f(x_0)\big)$ do wykresu funkcji f przecina oś OX w punkcie $A(x_0)$ a oś OY w punkcie $B(x_0)$, przy czym punkt $A(x_0)$ jest środkiem odcinka o końcach $\big(x_0,f(x_0)\big)$ i $B(x_0)$.

Rozwiązanie. Równanie prostej stycznej w punkcie $(x,f(x))$ do wykresu funkcji f wygląda tak: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ — przez y oznaczyliśmy tu drugą współrzędną punktu na stycznej, a przez x — pierwszą, przypominamy prosta styczna w punkcie $(x_0,f(x_0))$ do wykresu funkcji f przechodzi przez ten punkt, a jej współczynnik kierunkowy to $f'(x_0)$. Oś OY jest przecięta przez tę styczną w punkcie $B(x_0)=\big(0,f(x_0)-x_0f'(x_0)\big)$, a oś OX — w punkcie $A(x_0)=\big(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\big)$, podstawialiśmy $x=0$ i $y=0$. Wobec tego spełnione są równości: $x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=\frac{1}{2}\big(x_0+0\big)$ i $0=\frac{1}{2}\big(f(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)\big)$. Każda z nich jest równoważna równaniu $x_0f'(x_0)=2f(x_0)$. Zastępując w tym równaniu x_0 przez t i troszkę przekształcając otrzymujemy równanie $\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{2}{t}$. Stąd $2\ln|t|+C=\int\frac{2}{t}\,dt=\int\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt\xlongequal[df=f'(t)dt]{f=f(t)}\int\frac{df}{f}=\ln|f|$, więc $\ln|f(t)|=2\ln|t|+C=\ln(t^2)+C$. Wobec tego $|f(t)|=e^{\ln|f(t)|}=e^{\ln(t^2)+C}=t^2e^C$, a to oznacza, że $f(t)=\pm t^2e^C=Kt^2$, gdzie $K=\pm e^C$. Ponieważ wykres ma leżeć w pierwszej ćwiartce, więc $K>0$.

Można nie używać równania prostej. Zamiast niego można skorzystać z tego, że $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, gdzie α oznacza kąt, jaki tworzy styczna z dodatnią półosią poziomą i posłużyć się trójkątem prostokątnym.

---

3. 7 pt. Rozwiązać równanie $x''(t)+4x(t)=60\cos t+60\cos(2t)+60\cos(3t)+16e^{2t}\cos(2t)$.

Rozwiązanie. Mamy do czynienia z niejednorodnym równaniem różniczkowym liniowym, drugiego rzędu. Najpierw rozwiążemy równanie jednorodne $x''(t)+4x(t)=0$. Pierwiastkami równania charakterystycznego $\lambda^2+e4=0$ są liczby $\lambda_1=-2i$ oraz $\lambda_2=2i$. Wobec tego
$x(t)=c_1e^{-2it}+c_2e^{2it}=c_1\big(\cos(-2t)+i\sin(-2t)\big)+c_2\big(\cos(2t)+i\sin(2t)\big)=$
$$(c_1+c_2)\cos(2t)+i(-c_1+c_2)\sin(2t)=d_1\cos(2t)+d_2\sin(2t),$$
gdzie $d_1=c_1+c_2$ i $d_2=i(-c_1+c_2)$. Znaleźliśmy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego. Teraz zajmiemy się kolejno równaniami: $x''(t)+4x(t)=60\cos t$, $x''(t)+4x(t)=60\cos(2t)$, $x''(t)+4x(t)=60\cos(3t)$ i $x''(t)+4x(t)=16e^{2t}\cos(2t)$.

Ponieważ liczba i nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje rozwiązanie pierwszego równania postaci $A\cos t+B\sin t$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$60\cos t=\big(A\cos t+B\sin t\big)''+4\big(A\cos t+B\sin t\big)=-\big(A\cos t+B\sin t\big)+4\big(A\cos t+B\sin t\big)=$ $=3\big(A\cos t+B\sin t\big)$. Wynika stąd, że $3A=60$ i $3B=0$, więc rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $20\cos t$.

Ponieważ liczba $2i$ jest **jednokrotnym** pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc trzeba zwiększyć stopień wielomianu o **jeden**, zatem poszukiwać rozwiązania w postaci
$$(At+C)\cos(2t)+(Bt+D)\sin(2t).$$
Ponieważ rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest funkcja $d_1\cos(2t)+d_2\sin(2t)$, więc współczynniki C,D są dowolnymi liczbami: jeśli funkcja $(At+C)\cos(2t)+(Bt+D)\sin(2t)$ jest rozwiązaniem dla jakiejś czwórki liczb A,B,C,D, to po dowolnej zmianie liczb C,D i zachowaniu wartości A,B otrzymamy inne rozwiązanie równania. Podstawimy więc $C=0=D$, aby mniej pisać. Mamy zatem
$60\cos(2t)=\big(At\cos(2t)+Bt\sin(2t)\big)''+4\big(At\cos(2t)+Bt\sin(2t)\big)=$
$=\big(-2At\sin(2t)+A\cos(2t)+2Bt\cos(2t)+B\sin(2t)\big)'+4\big(At\cos(2t)+Bt\sin(2t)\big)=$
$=-4At\cos(2t)-4A\sin(2t)-4Bt\sin(2t)+4B\cos(2t)+4\big(At\cos(2t)+Bt\sin(2t)\big)=$
$=-4A\sin(2t)+4B\cos(2t)$,
więc $-4A=0$ i $4B=60$, czyli $A=0$ i $B=15$. Mamy rozwiązanie szczególne: $15t\sin(2t)$.

Teraz zajmieny się równaniem $x''(t)+4x(t)=60\cos(3t)$. Liczba $3i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Istnieje więc rozwiązanie postaci $A\cos(3t)+B\sin(3t)$. Podstawiamy tę funkcję do równania:

$60\cos(3t)=\big(A\cos(3t)+B\sin(3t)\big)''+4\big(A\cos(3t)+B\sin(3t)\big)=$
$=\big(-3A\sin(3t)+3B\cos(3t)\big)'+4\big(A\cos(3t)+B\sin(3t)\big)=$
$=-9A\cos(3t)-9B\sin(3t)+4\big(A\cos(3t)+B\sin(3t)\big)=-5A\cos(3t)-5B\sin(3t)$.
Wobec tego $-5A=60$ i $-5B=0$, więc $A=-12$, $B=0$. Rozwiązanie szczególne: $-12\cos(3t)$.

Kolej na ostatnie równanie. Liczba $2+2i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc szukamy rozwiązania w postaci $Ae^{2t}\cos(2t)+Be^{2t}\sin(2t)$. Po podstawieniu do równania otrzymujemy:
$16e^{2t}\cos(2t)=\big(Ae^{2t}\cos(2t)+Be^{2t}\sin(2t)\big)''+4\big(Ae^{2t}\cos(2t)+Be^{2t}\sin(2t)\big)=$
$=\big(2Ae^{2t}\cos(2t)-2Ae^{2t}\sin(2t)+2Be^{2t}\sin(2t)+2Be^{2t}\cos(2t)\big)'+4\big(Ae^{2t}\cos(2t)+Be^{2t}\sin(2t)\big)=$
$=\big(2(A+B)e^{2t}\cos(2t)+2(-A+B)e^{2t}\sin(2t)\big)'+4\big(Ae^{2t}\cos(2t)+Be^{2t}\sin(2t)\big)=$
$=8Be^{2t}\cos(2t)-8Ae^{2t}\sin(2t)+4\big(Ae^{2t}\cos(2t)+Be^{2t}\sin(2t)\big)=$
$=4\big((A+2B)e^{2t}\cos(2t)+(B-2A)e^{2t}\sin(2t)\big)$.
Stąd $4(A+2B)=16$, $4(B-2A)=0$, czyli $A+2B=4$, $B=2A$, więc $A=\frac{4}{5}$, $B=\frac{8}{5}$. Wobec

tego rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $\frac{4}{5}e^{2t}\cos(2t)+\frac{8}{5}e^{2t}\sin(2t)$.
Rozwiązaniem ogólnym równania

$$x''(t)+4x(t)=60\cos t+60\cos(2t)+60\cos(3t)+16e^{2t}\cos(2t)$$

jest funkcja
$x(t)=d_1\cos(2t)+d_2\sin(2t)+20\cos t+15t\sin(2t)-12\cos(3t)+\frac{4}{5}e^{2t}\cos(2t)+\frac{8}{5}e^{2t}\sin(2t)$.

A teraz to samo z użyciem liczb zespolonych

Mamy wzór $60\cos t+60\cos(2t)+60\cos(3t)+16e^{2t}\cos(2t)=\mathrm{Re}\big(60[e^{it}+e^{2it}+e^{3it}]+16e^{(2+2i)t}$. Można więc rozwiązać równanie $x''(t)+4x(t)=60[e^{it}+e^{2it}+e^{3it}]+16e^{(2+2i)t}$, część rzeczywista jego rozwiązania jest rozwiązaniem wyjściowego równania. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego już znamy: $c_1e^{-2it}+c_2e^{2it}$. Rozwiązania równania $x''(t)+4x(t)=60e^{it}$ szukamy w postaci ae^{it}. Podstawiamy do równania:

$$60e^{it}=\big(ae^{it}\big)''+4ae^{it}=\big(iae^{it}\big)'+4ae^{it}=i^2ae^{it}+4ae^{it}=-ae^{it}+4ae^{it}=3ae^{it}.$$

Wobec tego $a=20$, zatem rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $20e^{it}$.

Teraz równanie $x''(t)+4x(t)=60e^{2it}$. Ponieważ liczba $2i$ jest jednokrotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc rozwiązania poszukujemy w postaci ate^{2it}. Podstawiamy:

$$60e^{2it}=\big(ate^{2it}\big)''+4ate^{2it}=\big(2iate^{2it}+ae^{2it}\big)'+4ate^{2it}=4i^2ate^{2it}+4aie^{2it}+4ate^{2it}=4iae^{2it}.$$

Stąd wynika, że $60=4ai$, zatem $a=\frac{60}{4i}=-15i$, więc rozwiązanie szczególne to: $-15ite^{2it}$.

Kolejne równanie: $x''(t)+4x(t)=60e^{3it}$. Podstawiamy $x(t)=ae^{3it}$:

$$60e^{3it}=\big(ae^{3it}\big)''+4ae^{3it}=\big(3iae^{3it}\big)'+4ae^{3it}=9i^2ae^{3it}+4ae^{3it}=-9ae^{3it}+4ae^{3it}=-5ae^{3it}.$$

Wynika stąd, że $60=-5a$, czyli $a=-12$. Rozwiązaniem szczególnym jest $-12e^{3it}$.

No i ostatnie równanie: $x''(t)+4x(t)=16e^{(2+2i)t}$. Podstawiamy $x(t)=ae^{(2+2i)t}$:

$$60e^{(2+2i)t}=\big(ae^{(2+2i)t}\big)''+4ae^{(2+2i)t}=\big((2+2i)ae^{(2+2i)t}\big)'+4ae^{(2+2i)t}=$$
$$=(2+2i)^2ae^{(2+2i)t}+4ae^{(2+2i)t}=8iae^{(2+2i)t}+4ae^{(2+2i)t}=4a(2i+1)e^{(2+2i)t}.$$

zatem $16=4a(2i+1)$, więc $a=\frac{16}{2i+1}=\frac{4(1-2i)}{5}$. Rozwiązanie szczególne to: $\frac{4(1-2i)}{5}e^{(2+2i)t}$.

Rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+4x(t)=60[e^{it}+e^{2it}+e^{3it}]+16e^{(2+2i)t}$ to:

$$c_1e^{-2it}+c_2e^{2it}+20e^{it}-15ite^{2it}-12e^{3it}+\frac{4(1-2i)}{5}e^{(2+2i)t}.$$

Bez trudu przekobać się można, że jego część rzeczywista to funkcja znaleziona poprzednią metodą.

2 pt. Znaleźć wszystkie ograniczone rozwiązania równania

$$x''(t)+4x(t)=60\cos t+60\cos(2t)+60\cos(3t),$$

tj. te rozwiązania, dla których istnieje taka liczba $M\geq 0$, że $|x(t)|\leq M$ dla każdej liczby rzeczywistej t.

Rozwiązanie. Rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+4x(t)=60\cos t+60\cos(2t)+60\cos(3t)$ wygląda tak: $x(t)=d_1\cos(2t)+d_2\sin(2t)+20\cos t+15t\sin(2t)-12\cos(3t)$. Ponieważ t jest liczbą rzeczywistą, więc $|\cos t|\leq 1$, $|\cos(2t)|\leq 1$, $|\cos(3t)|\leq 1$ i $|\sin(2t)|\leq 1$, więc $|d_1\cos(2t)+d_2\sin(2t)+20\cos t-12\cos(3t)|\leq |d_1|+|d_2|+20+12$, zatem ta funkcja jest ograniczona. Funkcja $t\sin(2t)$ ograniczona nie jest, bo dla każdej liczby naturalnej n mamy $(\frac{\pi}{4}+n\pi)\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=\frac{\pi}{4}+n\pi>3n$. Wobec tego to równanie rozwiązań ograniczonych nie ma.

1 pt. Znaleźć wszystkie ograniczone rozwiązania równania $x''(t)+4x(t)=60\cos(3t)$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+4x(t)=60\cos(3t)$ znaleźliśmy wcześniej: $x(t)=d_1\cos(2t)+d_2\sin(2t)-12\cos(3t)$. Mamy zatem $|x(t)|\leq|d_1|+|d_2|+12$, więc ta funkcja jest ograniczona dla dowolnych d_1,d_2. W tym przypadku każde rozwiązanie jest ograniczone.

4. 7 pt. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + e^{4t} \cdot \sin t, \\ y'(t) = x(t) + 5y(t) - e^{4t} \cdot \sin t. \end{cases}$ (4)

Rozwiązanie. Znajdziemy wartości i wektory własne macierzy $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Równanie charakterystyczne to $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)+1 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda-4)^2$, więc $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.

$\binom{v_1}{v_2}$ jest wektorem własnym wtedy i tylko wtedy, gdy $3v_1 - v_2 = 4v_1$ i jednocześnie $v_1 + 5v_2 = 4v_2$. Każde z tych równań jest równoważne równaniu $v_1 = -v_2$. Znaleźliśmy część rozwiązań równania jednorodnego: $c_1\binom{1}{-1}e^{4t}$. Jednak nie są to wszystkie rozwiązania, bo niezależnie od wyboru liczby c_1 zachodzi nierówność $c_1\binom{1}{-1}e^{4\cdot 0} \neq \binom{1}{0}$, więc nie dla każdego warunku początkowego istnieje rozwiązanie tej postaci. Znajdziemy je w postaci $(\mathbf{w} + t\mathbf{v})e^{4t}$. Podstawimy do równania: $(\mathbf{v}+4\mathbf{w}+4t\mathbf{v})e^{4t} = \big((\mathbf{w}+t\mathbf{v})e^{4t}\big)' = M(\mathbf{w}+t\mathbf{v})e^{4t}$, zatem $M\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$ i jednocześnie $M\mathbf{w} = 4\mathbf{w}+\mathbf{v}$. $\mathbf{v}$ ma być wektorem własnym, np. $\mathbf{v} = \binom{1}{-1}$. Wtedy współrzędne wektora $\mathbf{w}$ wyznaczyć można z układu równań: $\begin{cases} 3w_1 - w_2 = 4w_1 + 1, \\ w_1 + 5w_2 = 4w_2 - 1. \end{cases}$ Każde z tych równań jest równoważne równaniu $w_2 = -w_1 - 1$. Wobec tego układ jest spełniony przez współrzędne wektora $\binom{0}{-1}$. Rozwiązaniem ogólnym układu jednorodnego jest $c_1\binom{1}{-1}e^{4t} + c_2\big[\binom{0}{-1} + t\binom{1}{-1}\big]e^{4t}$. Każdy wektor może być zapisany w postaci $c_1\binom{1}{-1} + c_2\binom{0}{-1}$ — wektory $\binom{1}{-1}$ i $\binom{0}{-1}$ nie są równoległe.

Teraz rozwiążemy układ niejednorodny. Znajdziemy rozwiązanie postaci $\alpha(t)\binom{1}{-1}$. Podstawiamy do równania (wektorowego):

$$\alpha'(t)\binom{1}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\alpha(t)\binom{1}{-1} + e^{4t}\sin t\binom{1}{-1} = \big(4\alpha(t) + e^{4t}\sin t\big)\binom{1}{-1}.$$

Wystarczy, by była spełniona równość: $\alpha'(t) = 4\alpha(t) + e^{4t}\sin t$. Otrzymaliśmy równanie różniczkowe linowe, niejednorodne pierwszego rzędu. Ma ono rozwiązanie postaci $ae^{4t}\sin t + be^{4t}\cos t$. Podstawiając do równania otrzymujemy:

$$ae^{4t}\cos t + 4e^{4t}\sin t - be^{4t}\sin t + 4be^{4t}\cos t = 4ae^{4t}\sin t + 4be^{4t}\cos t + e^{4t}\sin t,$$

czyli — po uproszczeniu — $ae^{4t}\cos t - be^{4t}\sin t = e^{4t}\sin t$. Stąd mamy $a = 0$, $b = -1$. Znaleźliśmy rozwiązanie szczególne: $-e^{4t}\cos t\binom{1}{-1}$, zatem ogólne wygląda tak:

$$-e^{4t}\cos t\binom{1}{-1} + c_1\binom{1}{-1}e^{4t} + c_2\Big[\binom{0}{-1} + t\binom{1}{-1}\Big]e^{4t}. \tag{4.1}$$

Oczywiście można też uzmiennić stałe, czyli poszukać takich funkcji $c_1(t)$, $c_2(t)$, że funkcja $c_1(t)\binom{1}{-1}e^{4t} + c_2(t)\big[\binom{0}{-1} + t\binom{1}{-1}\big]e^{4t}$ jest rozwiązaniem układu niejednorodnego. Po podstawieniu i redukcji otrzymujemy: $c_1'(t)\binom{1}{-1}e^{4t} + c_2'(t)\big[\binom{0}{-1} + t\binom{1}{-1}\big]e^{4t} = e^{4t}\sin t\binom{1}{-1}$, więc $c_2'(t) = 0$ i $c_1'(t) = \sin t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ (przyp. wektory $\binom{1}{-1}$ i $\binom{0}{-1}$ są nierównoległe!). Po scałkowaniu mamy $c_1(t) = -\cos t + K_1$ oraz $c_2(t) = K_2$, więc rozwiązaniem ogólnym układu jest

$$(-\cos t + K_1)\binom{1}{-1}e^{4t} + K_2\Big[\binom{0}{-1} + t\binom{1}{-1}\Big]e^{4t}, \tag{4.2}$$

więc $x(t) = -e^{4t}\cos t + K_1e^{4t} + K_2te^{4t}$, $y(t) = e^{4t}\cos t - K_1e^{4t} - K_2(1+t)e^{4t}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

2 pt. Znaleźć rozwiązanie układu (4) spełniające warunki $x(0) = -2$ i $y(0) = 2$.

Rozwiązanie. Ponieważ wartość rozwiązania ogólnego (4.1) w punkcie $t = 0$ jest równa $(c_1 - 1)\binom{1}{-1} + c_2\binom{0}{-1}$, więc przyjmujemy we wzorze (4.1) $c_1 = -1$, $c_2 = 0$.

1 pt. Znaleźć rozwiązanie układu (4) spełniające warunki $x(0) = 0 = y(0)$.

Rozwiązanie. Przyjmujemy we wzorze (4.1) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

5. Niech $f(x,y)=8y^2+6x^2y-x^3y$.

2 pt. Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}=12xy-3x^2y=3xy(4-x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=16y+6x^2-x^3$. Wobec tego (iloczyn równy jest 0, więc jeden z czynników zeruje się) $x=0$ lub $y=0$ lub $x=4$. Jeśli $x=0$, to $y=0$. Jeśli $y=0$, to $x=0$ albo $x=6$. Jeśli $x=4$, to $y=-2$. Mamy więc trzy punkty krytyczne: $(0,0)$, $(6,0)$ i $(4,-2)$.

5 pt. Wyjaśnić, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których — lokalne minima, a w których siodła.

Rozwiązanie. Mamy $D^2f(x,y)=\begin{pmatrix}12y-6xy & 12x-3x^2\\ 12x-3x^2 & 16\end{pmatrix}$.

$D^2(6,0)=\begin{pmatrix}0 & -36\\ -36 & 16\end{pmatrix}$; wartościami własnymi tej macierzy są pierwiastki równania kwadratowego $0=(0-\lambda)(16-\lambda)-(-36)(-36)=\lambda^2-16\lambda-36^2=(\lambda-8)^2-8^2-36^2$, czyli liczby $\lambda_1=8-\sqrt{8^2+36^2}=8-4\sqrt{2^2+9^2}<8-4\cdot 9<0$ i $\lambda_2=8+\sqrt{8^2+36^2}=8+4\sqrt{2^2+9^2}>8>0$; ponieważ jedna jest dodatnia, a druga — ujemna, więc w punkcie $(6,0)$ funkcja ma siodło.

Mamy $D^2(4,-2)=\begin{pmatrix}24 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$, więc wartościami własnymi są liczby 24 i 16, obie dodatnie. Funkcja ma w w punkcie $(4,-2)$ lokalne minimum.

Mamy $D^2(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$, więc wartościami własnymi są liczby 0 i 16. W tym przypadku ogólne kryterium nie działa. Ponieważ jedna z wartości własnych jest dodatnia, więc po ograniczeniu dziedziny do prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$, równoległej do wektora własnego odpowiadającego dodatniej wartości własnej, funkcja ma lokalne minimum właściwe, więc w punkcie $(0,0)$ funkcja nie ma lokalnego maksimum. Mamy

$$f(x,-\tfrac12x^2)=2x^4-3x^4+\tfrac12x^5=x^4(-1+\tfrac12x)<0 \text{ dla } x\in(0,2),$$

zatem w punkcie $(0,0)$ funkcja nie ma też lokalnego minimum, bo dowolnie blisko tego punktu są punkty, w których wartość funkcji jest ujemna, więc mniejsza niż w punkcie $(0,0)$.

3 pt. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w prostokącie

$$R=\{(x,y):\quad -1\le x\le 6, -3\le y\le 1\}.$$

Rozwiązanie. Mamy $f(-1,y)=7y+8y^2=8y(y+\frac78)$, zatem pierwiastkami tego wielomianu kwadratowego są liczby 0 i $-\frac78$. Przyjmuje on swą najmniejszą wartość w punkcie $\frac12(0-\frac78)=-\frac{7}{16}$. Jest ona równa $8(-\frac{7}{16})(-\frac{7}{16}+-\frac78)=-\frac{49}{32}$. Największą wartość na przedziale $[-3,1]$ ten wielomian przyjmuje w punkcie -3, leżącym dalej od punktu $-\frac{7}{16}$ niż punkt 1. Jest ona równa 51.

Mamy $f(x,1)=8+6x^2-x^3$. Pochodną tej funkcji jest $12x-3x^2=3x(4-x)$, więc ta funkcja maleje na przedziale $[-1,0]$, — rośnie na $[0,4]$ i maleje na $[4,6]$. Mamy $f(0,1)=8=f(6,1)$, więc 8 jest najmniejszą wartością tej funkcji na przedziale $[-1,6]$. Ponieważ $f(-1,1)=15<$ $<40=f(4,1)$, więc największą wartością funkcji $f(x,1)$ na przedziale $[-1,6]$ jest liczba 40.

Mamy $f(6,y)=8y^2$, więc najmniejszą wartością tej funkcji jest 0, a największą na przedziale $[-3,1]$ jest $72=f(6,-3)$.

Mamy teraz $f(x,-3)=72-18x^2+3x^3$. Pochodną tej funkcji jest $-36x+9x^2=9x(x-4)$, więc ta funkcja rośnie na przedziale $[-1,0]$, maleje na $[0,4]$ i rośnie na $[4,6]$. Mamy $f(-1,-3)=$ $=51>-24=f(4,-1)$, więc najmniejszą wartością na przedziale $[-1,6]$ jest liczba -24. Mamy też $f(0,-3)=72=f(6,-3)$, więc największą wartością funkcji $f(x,-3)$ osiąganą na przedziale $[-1,6]$ jest liczba 72.

Mamy jeszcze $f(4,-2) = 32-12\cdot 16+4^3\cdot 2 = 32(1-6+4) = -32 < -24 < -\frac{49}{32} < 0 < 8$. Oznacza to, że najmniejszą wartością funkcji w prostokącie R jest liczba -32: na mocy twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów funkcja przyjmuje w jakimś punkcie tego prostokąta najmniejszą wartość (poza nim przyjmuje mniejsze), a dzięki dokonanym obliczeniom wiemy, że musi to być jedna z pięciu liczb, wybieramy najmniejszą.

Mamy teraz $72 > 51 > 40$, więc największa wartość to 72 (poza prostokątem R przyjmowane są większe), znów stosujemy twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów.

Trochę inny sposób

Ustalmy na razie x. Wtedy funkcja f staje się wielomianem kwadratowym zmiennej y. Jego pierwiastkami są liczby 0 oraz $\frac{x^3-6x^2}{8}$, więc przyjmuje on swą najmniejszą wartość w punkcie $\frac{x^3-6x^2}{16}$. Ta najmniejsza (na całej prostej) wartość to $\frac{x^3-6x^2}{16}\left(\frac{x^3-6x^2}{2}+6x^2-x^3\right) = \frac{-1}{32}(x^3-6x^2)^2$. Mamy $(x^3-6x^2)' = 3x^2-12x = 3x(x-4)$, więc funkcja x^3-6x^2 rośnie na półprostej $(-\infty,0]$, maleje na przedziale $[0,4]$ i rośnie na półprostej $[4,\infty]$, nas interesuje tylko przedział $[-1,6]$. Wartościami funkcji x^3-6x^2 w punktach -1, 0, 4, 6 są liczby -7, 0, -32, 0,

$$\text{zatem } -32 \le x^3-6x^2 \le 0 \text{ dla } x\in[-1,6] \tag{5.1}$$

i wobec tego $\frac{x^3-6x^2}{16} \in [-3,1]$ dla każdego $x\in[-1,6]$. Wynika stąd, że dla interesujących nas liczb x najmniejszą wartością wielomianu kwadratowego $8y^2+6x^2y-x^3y$ na przedziale $[-3,1]$ jest liczba $\frac{-1}{32}(x^3-6x^2)^2$. Najmniejszą wartością tej funkcji na przedziale $[-1,6]$ jest liczba $\frac{-1}{32}\cdot(-32)^2 = -32$ — podnosimy do kwadratu liczby z przedziału $[-32,0]$. Wykazaliśmy, że najmniejszą wartością funkcji f na prostokącie R jest liczba -32 stosując jedynie to, co powinni Państwo wiedzieć już w pierwszym semestrze.

Największa wartość wielomianu kwadratowego $8y^2+6x^2y-x^3y$ na przedziale $[-3,1]$ jest przyjmowana w jednym z jego końców, więc jest większą z liczb $72-18x^2+3x^3 = 72+3(x^3-6x^2)$, $8+6x^3-x^3 = 8-(x^3-6x^2)$. Na mocy (5.1) $72+3(x^3-6x^2) \le 72$ dla $x\in[-1,6]$ oraz $8-(x^3-6x^2) \le 8-(-32) = 40 < 70$. Wobec tego największą wartością funkcji f na prostokącie R jest liczba 72.

---

6. Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(4 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M oraz kąty między wektorami własnymi.

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne to

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\big((5-\lambda)^2-4^2\big) = (4-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda),$$

więc $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$. $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 3 wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} 5v_1+2v_2+0v_3 = 3v_1 \\ 2v_1+5v_2+0v_3 = 3v_2 \\ 0v_1+0v_2+4v_3 = 3v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1+v_2 = 0 \\ v_1+v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$, więc wektorem własnym odpowiadającym $\lambda_1 = 3$ jest dowolny wektor postaci $[x,-x,0] = x[1,-1,0]$.

$\mathbf{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} 5v_1+2v_2+0v_3 = 4v_1 \\ 2v_1+5v_2+0v_3 = 4v_2 \\ 0v_1+0v_2+4v_3 = 4v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1+2v_2 = 0 \\ 2v_1+v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, więc $v_1 = v_2 = 0$, zatem wektorem własnym odpowiadającym $\lambda_2 = 4$ jest dowolny wektor postaci $[0,0,z] = z[0,0,1]$.

$\mathbf{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 7 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} 5v_1 + 2v_2 + 0v_3 = 7v_1 \\ 2v_1 + 5v_2 + 0v_3 = 7v_2 \\ 0v_1 + 0v_2 + 4v_3 = 7v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$, więc wektorem własnym odpowiadającym $\lambda_3 = 7$ jest dowolny wektor postaci $[x, x, 0] = x[1, 1, 0]$.

Wektory $[1, -1, 0]$, $[0, 0, 1]$ i $[1, 1, 0]$ są wzajemnie prostopadłe, bo ich iloczyny skalarne są równe 0.

(6 pt.) Niech $f(x, y, z) = (x \quad y \quad z) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, jeśli $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Znaleźć najmniejszą i największą z liczb $f(x, y, z)$.

Uwaga: jeśli $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{R}^3$ są punktami, które nie leżą w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, to dla każdego wektora $\mathbf{v}$ istnieją takie liczby c_1, c_2, c_3, że $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, gdzie $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{[\mathbf{0}, \mathbf{p}_1]}$.

Rozwiązanie. Niech $\mathbf{u} = [1, -1, 0]$, $\mathbf{v} = [0, 0, \sqrt{2}]$, $\mathbf{w} = [1, 1, 0]$. Wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ są wzajmenie prostopadłe, długość każdego z nich to $\sqrt{2}$. Dla każdego wektora $[x, y, z]$ o długości $\sqrt{2}$ istnieją takie liczby α, β, γ, że $[x, y, z] = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$. Mamy $2 = x^2 + y^2 + z^2 = [x, y, z] \cdot [x, y, z] =$

$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}) \cdot (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}) \xlongequal[\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=0]{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0} \alpha^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \beta^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \gamma^2\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$,

czyli $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Mamy też

$f(x, y, z) = (x \quad y \quad z) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot (\alpha\mathbf{u}^T + \beta\mathbf{v}^T + \gamma\mathbf{w}^T) =$

$= (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}) \cdot (3\alpha\mathbf{u}^T + 4\beta\mathbf{v}^T + 7\gamma\mathbf{w}^T) = 3\alpha^2 \cdot 2 + 4\beta^2 \cdot 2 + 7\gamma^2 \cdot 2$, bowiem $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}^T = 3\mathbf{u}^T$,

gdyż $\mathbf{u}$ lest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 3, symbol $\mathbf{u}^T$ oznacza jedynie, że zamiast pisać go poziomo, piszemy pionowo; analogicznie dla $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T$ to iloczyn macierzy równy kwadratowi skalarnemu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ wektora $\mathbf{u}$, itd. Z wzoru $f(x, y, z) = 2(3\alpha^2 + 4\beta^2 + 7\gamma^2)$ wynika natychmiast, że najmniejszą wartość to wyrażenie przyjmuje, gdy α^2 jest możliwie duże, a β^2 i γ^2 możliwie małe, przypominam, że $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Oznacza to, że minimum funkcja osiąga, gdy $\alpha = \pm 1$ i $\beta = \gamma = 0$. Jest więc ono równe 6. Analogiczne rozważania prowadzą do wniosku: największą wartością funkcji f na sferze $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ jest liczba 14.

Inne rozwiązanie

Przemnażając otrzymujemy wzór

$$f(x, y, z) = 5x^2 + 4xy + 5y^2 + 4z^2 = 5x^2 + 4xy + 5y^2 + 4(2 - x^2 - y^2) = 8 + x^2 + 4xy + y^2.$$

Wyeliminowaliśmy zmienną z dzięki równości $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Oczywiście dalej musimy pamiętać o nierówności $x^2 + y^2 \leq 2$. Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $2xy \leq x^2 + y^2$, która jest równoważna oczywistej nierówności $0 \leq (x - y)^2$ przechodzącej w równość wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Wobec tego

$$8 + x^2 + 4xy + y^2 \leq 8 + x^2 + 2(x^2 + y^2) + y^2 = 8 + 3(x^2 + y^2) \leq 8 + 3 \cdot 2 = 14,$$

przy czym równość jest osiągana, gdy $x = y = 1$. Mamy też $2xy \geq -x^2 - y^2$, tu równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -y$. Stąd wynika, że

$$8 + x^2 + 4xy + y^2 \geq 8 + x^2 - 2(x^2 + y^2) + y^2 = 8 - (x^2 + y^2) \geq 8 - 2 = 6,$$

przy czym nierówność staje się równością, gdy $x = 1 = -y$.

Czytelnik zapewne widzi, że to rozwiązanie formalnie rzecz biorąc jest dostępne dla licealisty w II klasie. Z formalnego punktu widzenia nie występują w nim np. wektory własne. Ale one tu są tylko trochę ukryte w zdaniach … równość zachodzi wtedy i tylko ….

APEL

Rozwiązania napisałem, by mogli je Państwo **przestudiować**. To oznacza coś zupełnie innego niż *przeczytać*. Wymaga więcej czasu i wysiłku. Trzeba dojść do tego, skąd biorą się różne zdania, porównać metody. Apeluję o poświęcenie odpowiedniej ilości czasu na przestudiowanie tych rozwiązań, obejrzenie stosowanych twierdzeń, np. w notakach umiesczonych na mojej stronie internetowej.

Apeluję też o to, by wszyscy, którzy przyjdą na egzamin poprawkowy:

1. znali definicję pochodnej,

2. umieli obliczać pochodne dowolnie skomplikowanych funkcji (czyli umieli stosować wzory na pochodną sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i **złożenia**,

3. znali definicję stycznej do wykresu funkcji,

4. znali definicję logarytmu, sinusa i kosinusa,

5. znali wzory na całkowanie przez podstawienie i na całkowanie przez części,

6. znali definicję wektora własnego i wartości własnej.

Chodzi o to, że jeśli ktoś wykaże się n ieznajomością jednej z tych rzeczy w dowolnej częsci egzaminu, to zostanie nagrodzony oceną niedostateczną bez względu na pozostałe elementy egzaminu — tu nie obwiązuje dodwanie punktów. Aby nie było żadnych wątpliwości: znajomość tych elementów jest konieczna do zdania egzaminu, ale nie musi okazać się dostateczna.

drobiazgi

Wielu studentów, uważa, że na egzamin pisemny trzeba przyjść odzianym jak na przyjęcie u angielskiej królowej. Wasza sprawa. Jednak mam prośbę, by wybierając obuwie pamiętać o tym, że jeśli przyjdzie w czasie egzaminu wstać i przejść kawałek, to niekoniecznie wszyscy inni, np. myślący nad jakimś zadaniem, chcą to natychmiast uslyszeć. Byłoby więc miło, gdyby Państwo zechcieli ubrać się tak, by móc poruszać się cicho (oczywiście ta uwaga nie dotyczy osób, które w czasie egzaminu nie chodzą w ogóle, np. nie wychodzą wcześniej).