Matematyka A, kolokwium, 18 maja 2011, rozwiązania

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) (a) Znaleźć takie liczby A, B, C, D i E, że jeśli $w(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ dla każdej liczby x, to $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(2) = 9$, $w(3) = 36$ i $w(4) = 100$.
(b) Obliczyć $w(5)$.

Rozwiązanie

$$\text{Mamy} \begin{cases} 0 = w(0) = A, \\ 1 = w(1) = A + B + C + D + E, \\ 9 = w(2) = A + 2B + 4C + 8D + 16E, \\ 36 = w(3) = A + 3B + 9C + 27D + 81E, \\ 100 = w(4) = A + 4B + 16C + 64D + 256E. \end{cases}$$

Bierźemy pod uwagę to, że $A = 0$, następnie odejmujemy drugie równanie pomnożone przez odpowiednie liczby od następnych, wynik dzielimy, by otrzymać:

$$\begin{cases} 0 = A, \\ 1 = B + C + D + E, \\ \frac{7}{2} = C + 3D + 7E, \\ \frac{11}{2} = C + 4D + 13E\ , \\ 8 = C + 5D + 21E. \end{cases} \qquad \text{Przekształcamy dalej} \quad \begin{cases} 0 = A, \\ 1 = B + C + D + E, \\ \frac{7}{2} = C + 3D + 7E, \\ 2 = D + 6E, \\ \frac{9}{2} = D + 8E. \end{cases}$$

Odejmujemy dwa ostanie równania i dzielimy wynik przez 2: $E = \frac{1}{4}$. Z przedostatniego równania otrzymujemy $D = \frac{1}{2}$. To pozwala obliczyć $C = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ oraz $B = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$. Wobec tego $w(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$. Stąd wynika, że $w(5) = \frac{25}{4} + \frac{125}{2} + \frac{625}{4} = \frac{125}{2} + \frac{325}{2} = \frac{450}{2} = 225$.

Nieco inne rozwiązanie

Wszystkie wartości funkcji f są kwadratami liczb całkowitych, więc jest pewna szansa (**ale nie pewność!!!**), że wielomian w jest kwadratem innego wielomianu. Załóżmy, że $w(x) = \big(v(x)\big)^2$, gdzie $v(x) = ax^2 + bx + c$ — może będziemy mieć szczęście. Powinno być $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ i $v(2) = 3$, czyli $c = 0$, $a + b + c = 1$, $4a + 2b + c = 3$. Z tych równości wynika od razu, że $a = \frac{1}{2} = b$, więc $v(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Wtedy $v(3) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$ oraz $v(4) = \frac{16}{2} + \frac{4}{2} = 10$. Mamy szczęście! Znaleźliśmy $w(x) = =\big(v(x)\big)^2 = \big(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\big)^2 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$. Wobec tego $w(5) = \big(v(5)\big)^2 = \big(\frac{25}{2} + \frac{5}{2}\big)^2 = 15^2 = 225$.

Komentarz: Z rozumowania w pierwszym sposobie wynika, że zadanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. Drugi sposób poza tym, że mógłby nie prowadzić do rozwiązania, nie daje żadnych podstaw do stwierdzenia, że znalezione rozwiązanie jest **jedyne***! Jest więc gorszy, bo jest niepewny, być może nie daje wszystkich możliwych rozwiązań, ale daje jedno. Wielu matematyków domagało by się uzupełnienia tego rozumowania dowodem jedyności znalezionego rozwiązania argumentując, że domyślnie sformułowanie wymaga tego… Można to zrobić np. tak. Jeśli wielomiany w_1, w_2, stopnia nie większego niż cztery spełniają warunki z zadania, to ich różnica jest wielomianem stopnia nie większego niż 4, który ma 5 pierwiastków. Jest to możliwe jedynie wtedy, gdy ta różnica jest wielomianem zerowym, więc gdy $w_1 = w_2$.*
Z punktu widzenia obliczeń, jest lepszy, bo rachunki są prostsze

---

2. (10 pt.) Znaleźć $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \\ 25 & 1683 & -11 \end{vmatrix}$.

Rozwiązanie

Zaczniemy od przypomnienia, że jeśli zastąpimy jeden z wierszy sumą tego wiersza i innego pomnożonego przez dowolną liczbę pozostawiając wszystkie pozostałe wiersze bez zmian, to wyznacznik nie zmieni się. Wobec tego $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \\ 25 & 1683 & -11 \end{vmatrix} \overset{\textit{pierwszy plus}}{\underset{\textit{trzy razy drugi}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 25 & 1683 & -11 \end{vmatrix} =$

$= -6 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 25 & -11 \end{vmatrix} = -6(11+100) = -666\,.$

---

3. (10 pt.) (a) Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b istnieją takie liczby całkowite x, y, że:

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(b) Znaleźć wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Znaleźć macierz $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

(d) Czy istnieje taki niezerowy wektor $\vec{\mathbf{v}}$, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = 3\|\vec{\mathbf{v}}\|$?

Rozwiązanie

Mamy $\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 - 5^2 = -1$. Wobec tego $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$.

Stąd $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + 5b \\ 5a - 12b \end{pmatrix}$, czyli $x = -2a + 5b$ i $y = 5a - 12b$, więc jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, to również $x, y \in \mathbb{Z}$.

Wartości własne wyznaczamy z równania charakterystycznego:

$$0 = \begin{vmatrix} 12 - \lambda & 5 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (12 - \lambda)(2 - \lambda) - 25 = \lambda^2 - 14\lambda - 1 = (\lambda - 7)^2 - 50.$$

Otrzymujemy $\lambda_1 = 7 - \sqrt{50}$, $\lambda_2 = 7 + 5\sqrt{2}$. Mamy $7 + 5\sqrt{2} > 14$, więc $-\frac{1}{14} < 7 - \sqrt{50} = \frac{-1}{7+\sqrt{50}} < 0$. Niech $\vec{\mathbf{v}}_1 = \binom{1}{y_1}$ będzie wektorem własnym odpowiadającym λ_1, a $\vec{\mathbf{v}}_2 = \binom{1}{y_2}$ — wektorem własnym odpowiadającym λ_2. Niech $\mathbf{v}(t) = \binom{1}{t}$. Niech $f(t) = \frac{\|A\mathbf{v}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}$. Funkcja f jest ciągła na całej prostej. Ponieważ $f(y_2) = \lambda_2 > 3 > |\lambda_1| = f(y_1)$, więc między liczbami y_2 i y_1 znajduje się taka liczba t, że $f(t) = 3$. Dowodzi to, że odpowiedź na pytanie (d) jest twierdząca. Zadanie rozwiązaliśmy.

Komentarz

Można efektywnie znaleźć liczby y_1, y_2 rozwiązując dwa równania: $(12 - \lambda_1) \cdot 1 + 5y_1 = 0$ oraz $(12 - \lambda_2) \cdot 1 + 5y_2 = 0$. Otrzymujemy wtedy $y_1 = \frac{12-7+5\sqrt{2}}{5} = 1 + \sqrt{2}$ oraz $y_2 = \frac{12-7-5\sqrt{2}}{5} = 1 - \sqrt{2}$.

Jeśli ktoś chce rozwiązać tę część zadania bez korzystania z tego, że funkcja ciągła ma własność przyjmowania wartości pośrednich, to może stwierdzić, że równość $\|A\mathbf{v}\| = 3\|\mathbf{v}\|$ jest równoważna temu, że $(12x + 5y)^2 + (5x + 2y)^2 = 9(x^2 + y^2)$ — przyjęliśmy, że $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$, potem podnieśliśmy równość $\|A\mathbf{v}\| = 3\|\mathbf{v}\|$ stronami do kwadratu. Otrzymana równość może być przepisana w postaci $144x^2 + 120xy + 25y^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2 = 9x^2 + 9y^2$, czyli $160x^2 + 140xy + 20y^2 = 0$, tzn. $8x^2 + 7xy + y^2 = 0$. Traktując tę równość jako równanie kwadratowe z niewiadomą y zależne od parametru x, otrzymujemy $\Delta = 49x^2 - 32x^2 = 17x^2 \geq 0$. Możemy napisać, że $y = \frac{1}{2}(-7x \pm \sqrt{17x^2}\,) = \frac{x}{2}(-7 \pm \sqrt{17})$. Wynika z niej, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ istnieją dokładnie dwie takie liczby rzeczywiste y, że jeśli $\mathbf{v} = \binom{x}{y} = \binom{x}{\frac{x}{2}(-7\pm\sqrt{17})}$, to $\|A\mathbf{v}\| = 3\|\mathbf{v}\|$.

Dodajmy jeszcze, że nie istnieje taki rzeczywisty wektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, że $\|A\mathbf{v}\| = 15\|\mathbf{v}\|$, do udowodnienia czego, wielce szanowne studentki i wielce szanownych studentów gorąco zachęcam.

4. (10 pt.) Niech $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

(b) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

(c) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^2 i macierzy A^3.

(d) Znaleźć macierze A^2 i A^3.

(e) Czy przekształcenie przypisujące wektorowi $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ wektor $A \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$ jest symetrią lub obrotem?

Rozwiązanie

Zaczniemy od znalezienia wartości własnych macierzy A. Rozwiążemy więc równanie charakterystyczne $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[\text{drugiego wiersza}]{\text{względem}} (1-\lambda)\big((-3-\lambda)(3-\lambda)+8\big) = (1-\lambda)\big(\lambda^2-1\big) =$

$= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$, zatem $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = -1$.

Wektory własne odpowiadające wartości własnej 1 znajdujemy rozwiązując układ równań liniowych $\begin{cases} -4x+2y-2z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \\ 4x-2y+2z=0 \end{cases}$, czyli rozwiązując równanie $2x-y+z=0$. Spełnia je każdy wektor postaci $\begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wektory te tworzą płaszczyznę prostopadłą do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wektory własne odpowiadające wartości własnej -1 znajdujemy rozwiązując układ równań liniowych $\begin{cases} -2x+2y-2z=0 \\ 0x+2y+0z=0 \\ 4x-2y+4z=0 \end{cases}$, czyli dwa równania $y=0$ oraz $x+z=0$. Poszukiwanymi wektorami własnymi są więc wektory postaci $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wartościami własnymi macierzy A^{-1} są liczby $\frac{1}{1} = 1$ i $\frac{1}{-1} = -1$. Odpowiadają im te same wektory własne, co w przypadku macierzy A.

Wartościami własnymi macierzy A^2 są liczby $1^2 = 1$ i $(-1)^2 = 1$. Macierz A^2 ma więc potrójną wartość własną 1, której odpowiadają wektory postaci $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz postaci $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ponieważ suma wektorów własnych odpowiadających **jednej** wartości własnej jest wektorem własnym macierzy odpowiadającym tej wartości własnej, więc wektorami własnymi macierzy A^2 są wszystkie wektory postaci $r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, gdzie r, s, t oznaczają dowolne liczby. W tej postaci można zapisać dowolny wektor (trójwymiarowy), bo $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Wobec tego dla każdego wektora $\mathbf{v}$ zachodzi równość $A^2\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Oznacza to, że $A^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wynika stąd w szczególności, że $A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$. Wobec tego wartości własne i wektory własne macierzy A^3 to wartości własne i wektory własne macierzy A.

Załóżmy, że przekształcenie przypisujące wektorowi $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ wektor $A \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$ jest symetrią względem pewnego punktu. Wtedy jedynym punktem stałym $\mathbf{x}$, czyli takim, że zachodzi równość $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, jest punkt środek tej symetrii. Przekształcenie nie jest więc symetrią względem punktu, bo ma nieskończenie wiele punktów stałych: wszystkie wektory własne odpowiadające jedynce. Nie jest też obrotem wokół prostej, bo wtedy punktami stałymi przekształcenia byłyby punkty osi obrotu, a tu mamy do czynienia z płaszczyzną. Symetrię wokół prostej już wykluczyliśmy, bo symetria względem prostej w przestrzeni to obrót wokół tej prostej o 180°. Wreszcie symetria osiowa. Musiałaby to być symetria względem płaszczyzny złożonej z punktów stałych przekształcenia, czyli płaszczyzny o równaniu $2x - y + z = 0$. Wtedy jednak wektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do niej prostopadły musiałby przechodzić na wektor $-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a tak nie jest: $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Uwaga

Przekształcenie byłoby symetrią, gdyby prosta własna odpowiadająca wartości własnej $\lambda_3 - 1$ była prostopadła do płaszczyzny własnej odpowiadającej wartości własnej $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

---

5. (10 pt.) Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & 1+3\sqrt{3} & 1-3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} & \frac{13}{2} & 2+\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} & 2-\frac{3}{2}\sqrt{3} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$, $\quad \vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Znaleźć macierz M^T oraz iloczyny $M \cdot M^T$, $M^T \cdot M$.

(b) Znaleźć $M\vec{\mathbf{u}}$. Wskazać jedną (z być może kilku) wartość własną macierzy M.

(c) Obliczyć M^{-1}.

(d) Wykazać, że macierze M i M^T mają te same wartości własne.

(e) Obliczyć $|\det(M)|$.

Rozwiązanie

Mamy oczywiście $M^T = \begin{pmatrix} 5 & 1-3\sqrt{3} & 1+3\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} & \frac{13}{2} & 2-\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} & 2+\frac{3}{2}\sqrt{3} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$.

Z definicji macierzy transponowanej i definicji mnożenia macierzy wynika, że wyrazami macierzy $M \cdot M^T$ są iloczyny skalarne wierszy macierzy M, a wyrazami macierzy $M^T \cdot M$ — iloczyny skalarne kolumn macierzy M.

Mamy więc:

$[5, 1{+}3\sqrt{3}, 1{-}3\sqrt{3}] \cdot [5, 1{+}3\sqrt{3}, 1{-}3\sqrt{3}] = 5^2 + (1+3\sqrt{3})^2 + (1-3\sqrt{3})^2 = 25+1+6\sqrt{3}+27+1-6\sqrt{3}+27 = 81$,

$[5, 1+3\sqrt{3}, 1-3\sqrt{3}] \cdot [1-3\sqrt{3}, \frac{13}{2}, 2+\frac{3}{2}\sqrt{3}] = 5 - 15\sqrt{3} + \frac{13}{2} + \frac{39}{2}\sqrt{3} + 2 - 6\sqrt{3} + +\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{27}{2} = 0$,

$[1-3\sqrt{3}, \frac{13}{2}, 2+\frac{3}{2}\sqrt{3}] \cdot [1+3\sqrt{3}, 2-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{13}{2}] = 1 - 27 + 13 - \frac{39}{4}\sqrt{3} + 13 - \frac{39}{4}\sqrt{3} = 0$,

zatem $M \cdot M^T = 81 \cdot I = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$. Z tej równości wynika, że

$$\det(M) \cdot \det(M^T) = \det(M \cdot M^T) = 81^3 \neq 0, \tag{1}$$

więc $\det(M) \neq 0$, zatem M^{-1} istnieje. Wynika stąd, że $M^T = M^{-1}MM^T = M^{-1} \cdot 81 \cdot I = 81M^{-1}$, więc $M^{-1} = \frac{1}{81}M^T$. Wynika stąd, że $M^T \cdot M = 81M^{-1}M = 81I$.*

Macierze M i M^T mają ten sam wielomian charakterystyczny, bo wyznacznik można obliczać rozwijając go względem kolumn lub względem wierszy. Stąd wynika, że mają takie same wartości własne. (Nie wynika natomiast, że wektory własne są identyczne, tak na ogół nie jest.)

Mamy $\det(M) = \det(M^T)$, bo wyznacznik można obliczać rozwijając go względem kolumn lub względem wierszy. Stąd i z równości (1) wynika, że $(\det(M))^2 = 81^3$, więc możemy napisać $|\det(M)| = \sqrt{81^3} = 9^3 = 729$.

Uwaga

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, więc jeśli $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, to $MM^T \neq$ $\neq M^T M$.

---

*Na ogół $M \cdot M^T \neq M^T \cdot M$, Przykład jest dalej w tekście.