1. (10 pt.) Łódka porusza się w wodzie bez napędu (została rozpędzona wcześniej). Opór wody jest proporcjonalny do prędkości (chwilowej) łódki. W pewnej chwili prędkość łódki była równa 1,5 m/s, a po następnych 4 s już tylko 1 m/s.
Po jakim czasie prędkość łódki zmniejszy się do 4 cm/s?

Rozwiązanie. Niech $v(t)$ będzie prędkością łódki w chwili t. Niech m ozancza mase łódki, a liczba $k>0$ współczynnik oporu. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że wtedy:

$$mv'(t) = -kv(t)\,.$$

Otrzymaliśmy równanie o zmiennych rozdzielonych. Mamy $\frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{k}{m}$, więc $\ln v(t) = -\frac{k}{m}t + c$, zakładamy, że $v>0$ — można, to tylko kwestia wyboru zwrotu osi. Mamy więc $v(t) = e^{-\frac{k}{m}t+c}$.
Dalej: $\frac{3}{2} = v(0) = e^c$, zatem $v(t) = e^{-\frac{k}{m}t+c} = e^c\cdot e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{k}{m}t}$.
Ponieważ $1 = v(4) = \frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{4k}{m}}$, więc $e^{-\frac{4k}{m}} = \frac{2}{3}$, zatem $v(t) = \frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{3}{2}\cdot\left(e^{-\frac{4k}{m}}\right)^{\frac{t}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}$.
Trzeba jeszcze znaleźć taką liczbę t, że $\frac{1}{25} = 0{,}04 = v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}$. Po zlogarytmowaniu otrzymujemy $(\frac{t}{4}-1)\ln\frac{2}{3} = -\ln 25$, czyli $t = 4\frac{-\ln 25}{\ln\frac{2}{3}} + 4 = 8\frac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2} + 4$. Zadanie zostało rozwiązane.$\boxtimes$

Można jeszcze użyć jakiegoś cudu elektroniki i stwierdzić, że

$$8\frac{\ln 5}{\ln 3-\ln 2} + 4 \approx 35{,}754898367328944221087753147102 \approx 36\,.$$

Można też np. zauważyć, że $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$, więc $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \approx \frac{1}{25}$, więc $\frac{t}{4}-1\approx 8$, zatem $t\approx 4\cdot(1+8) = 36$. ■

2. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$x(t)x'(t) + t = 1$$

spełniające warunek początkowy $x(1) = 4$. Podać dziedzinę tego rozwiązania.

Rozwiązanie. Mamy $x(t)x'(t) = 1-t$, więc $\frac{1}{2}\big(x(t)\big)^2 = \int(1-t)\,dt = -\frac{1}{2}(1-t)^2 + c$, a stąd wynika, że $x(t) = \pm\sqrt{2c-(1-t)^2}$, z równości $x(1) = 4$ wynika, że $4 = \pm\sqrt{2c}$, więc $2c = 16$. Wobec tego, że $x(1)>0$, zachodzi równość $x(t) = \sqrt{16-(1-t)^2} = \sqrt{(3+t)(5-t)}$ ($x(t)$ nie może zmieniać znaku, bo zeruje się tylko w końcach przedziału $[-3,5]$). Jasne jest, że musi być spełniona nierówność $-3\le t\le 5$ (bo $t\in\mathbb{R}$ oraz $x(t)\in\mathbb{R}$). W końcach przedziału pochodna jest jednak nieskończona, więc przyjmujemy, że dziedziną jest przedział otwarty $(-3,5)$. ■

(10 pt.) (dod.) Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$x(t)x'(t) + t = 1$$

spełniające warunek początkowy $x(1) = 0$. Podać dziedzinę tego rozwiązania.

Rozwiązanie. Postępując tak, jak przed chwilą otrzymujemy: $x(t) = \pm\sqrt{2c-(1-t)^2}$, więc $0 = x(1) = \pm\sqrt{2c}$. Stąd wynika, że $c = 0$ i wobec tego $x(t) = \pm\sqrt{-(1-t)^2}$, ale ten wzór w dziedzinie rzeczywistej określa funkcję okręśloną na zbiorze złożonym z jednego tylko punktu: $t = 1$. Wyklucza to różniczkowanie funkcji, bo definicja pochodnej wymaga, by funkcja była zdefiniowana nie tylko w jednym punkcie, ale również w jego otoczeniu. **Nie istnieje rozwiązanie tego zagadnienia początkowego!** ■

3. (10 pt.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = e^{2t} + 4te^{2t}\cos t + 5t\,.$$

Rozwiązanie. Zaczniemy, jak zwykle w przypadku równania liniowego, od rozwiązania równania jednorodnego: $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$. Równanie charakterystyczne wygląda tak: $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1$, czyli $(\lambda - 2)^2 = -1$. Ma ono dwa różne pierwiastki $\lambda_1 = 2 - i$ oraz $\lambda_2 = 2 + i$. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja postaci $c_1e^{(2-i)t} + c_2e^{(2+i)t}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają dowolne liczby zespolone. Teraz znajdziemy po jednym rozwiązaniu (szczególnym) każdego z równań: $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 5t$, $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = e^{2t}$, $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 4te^{2t}\cos t$.

W pierwszym przypadku mamy szanse znaleźć rozwiązanie postaci $At + B$. Po podstawieniu tej funkcji w miejsce x do równania otrzymujemy

$$5t = (At + B)'' - 4(At + B)' + 5At + 5B = 0 - 4A + 5At + 5B = 5At + 5B - 4A\,.$$

Jasne jest, ze równość ta jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 1$ oraz $B - 4A = 0$, czyli $B = \frac{4}{5}$. Rozwiązaniem szczególnym pierwszego równania jest funkcja $t + \frac{4}{5}$.

W drugim przypadku znajdziemy rozwiązanie w postaci $w(t)e^{2t}$, gdzie w jest pewnym wielomianem zmiennej t. Podstawiając w miejsce $x(t)$ wyrażenie $w(t)e^{2t}$ otrzymujemy

$$e^{2t} = \big(w(t)e^{2t}\big)'' - 4\big(w(t)e^{2t}\big)' + 5w(t)e^{2t} =$$

$$= \big(w'(t)e^{2t} + 2w(t)e2t\big)' - 4\big(w'(t)e^{2t} + 2w(t)e2t\big) + 5w(t)e^{2t} =$$
$$= w''(t)e^{2t} + 4w'(t)e^{2t} + 4w(t)e^{2t} - 4w'(t)e^{2t} - 8w(t)e^{2t} + 5w(t)e^{2t} = e^{2t}\big(w''(t) + w(t)\big)\,.$$

Wystarczy przyjąć $w(t) = 1$ dla każdego t. Rozwiązaniem szczególnym jest więc w tym przypadku funkcja e^{2t}.

Przekształceń mogło być mniej, bo z twierdzeń, które były na wykładzie, wynika od razu, że stopień wielomianu w powinien być zerem.

Kolej na ostatnie równanie. Mamy $\mathrm{Re}\big(e^{(2+i)t}\big) = \mathrm{Re}\big(e^{2t}(\cos t + i\sin t)\big) = e^{2t}\cos t$. Z tej równości wynika, że można rozwiązać najpierw równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 4te^{(2+i)t}$. Część rzeczywista tego rozwiązania spełnia równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 4te^{2t}\cos t$, bo wszystkie współczynniki po lewej stronie są liczbami rzeczywistymi. Znajdziemy rozwiązanie postaci $w(t)e^{(2+i)t}$. Po podstawieniu tego wyrażenia do równania w miejsce $x(t)$ otrzymujemy $4te^{(2+i)t} = \big(w(t)e^{(2+i)t}\big)'' - 4\big(w(t)e^{(2+i)t}\big)' + 5w(t)e^{(2+i)t} =$

$$= \big(w'(t)e^{(2+i)t} + (2+i)w(t)e^{(2+i)t}\big)' - 4\big(w'(t)e^{(2+i)t} + (2+i)w(t)e^{(2+i)t}\big) + 5w(t)e^{(2+i)t} =$$
$$= w''(t)e^{(2+i)t} + (2+i)w'(t)e^{(2+i)t} + (2+i)w'(t)e^{(2+i)t} + (2+i)^2w(t)e^{(2+i)t} -$$
$$-4w'(t)e^{(2+i)t} - 4(2+i)w(t)e^{(2+i)t}\big) + 5w(t)e^{(2+i)t} = \big(w''(t) + 2iw'(t)\big)e^{(2+i)t}\,.$$

Szukamy więc wielomianu w spełniającego równanie $4t = w''(t) + 2iw'(t)$. Stopień wielomianu w' musi być równy 1. Znajdziemy takie liczby zespolone A, B, że $w'(t) = At + B$ i $4t = A + 2i(At + B) = (A + 2iB) + 2Ait$. Wystarczy, by $2Ai = 4$ i $A + 2Bi = 0$, czyli $A = -2i$, $B = 1$. Wtedy $w'(t) = -2it + 1$, zatem $w(t) = -it^2 + t + c$. Ponieważ szukamy jednego rozwiązania równania, więc przyjmujemy $c = 0$. Rozwiązaniem szczególnym równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 4te^{(2+i)t}$ jest funkcja $(-it^2 + t)e^{(2+i)t} = (t - it^2)(\cos t + i\sin t)e^{2t}$, więc jej część rzeczywista, czyli funkcja $\big(t\cos t + t^2\sin t\big)e^{2t}$, jest rozwiązaniem szczególnym równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 4te^{2t}\cos t$. Możemy więc stwierdzić, że rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = e^{2t} + 4te^{2t}\cos t + 5t$ jest funkcja $e^{2t} + \big(t\cos t + t^2\sin t\big)e^{2t} + t + \frac{4}{5} + c_1e^{(2-i)t} + c_2e^{(2+i)t}$. Można napisać $e^{2t} + \big(t\cos t + t^2\sin t\big)e^{2t} + t + \frac{4}{5} + d_1e^{2t}\cos t + d_2e^{2t}\sin t$, gdzie $d_1 = c_1 + c_2$, $d_2 = i(c_2 - c_1)$. ■

4. (10 pt.) Rozwiązać równanie

$$x''(t) + x(t) = \frac{2}{\cos t \sin t}\,.$$

Rozwiązanie. Zaczniemy, jak zwykle w przypadku równania liniowego, od rozwiązania równania jednorodnego: $x''(t) + x(t) = 0$. Pierwiastkami równania charakterystycznego $\lambda^2 + 1 = 0$ są liczby $\lambda_1 = -i$ oraz $\lambda_2 = i$. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest więc funkcja $c_1 e^{-it} + c_2 e^{it} = (c_1 + c_2)\cos t + i(c_2 - c_1)\sin t = d_1 \cos t + d_2 \sin t$. Funkcja $\frac{2}{\cos t \sin t}$ nie jest quasiwielomianem, ani częścią rzeczywistą quasiwielomianu, zatem nie ma podstaw do stosowania metody współczynników nieoznaczonych i trudno jest odgadnąć rozwiązania tego równania. Uzmiennimy więc stałe d_1 i d_2. Szukamy rozwiązania równania $x''(t)+x(t) = \frac{2}{\cos t \sin t}$ w postaci $x(t) = d_1(t)\cos t + d_2(t)\sin t$. Wtedy $x'(t) = d_1'(t)\cos t + d_2'(t)\sin t - d_1(t)\sin t + d_2(t)\cos t$. Dalej będziemy zakładać, że $d_1'(t)\cos t + d_2'(t)\sin t = 0$. Dzięki temu założeniu otrzymujemy równość $x''(t) = -d_1'(t)\sin t + d_2'(t)\cos t - d_1(t)\cos t - d_2(t)\sin t$, a z niej wzór

$$\frac{2}{\cos t \sin t} = x''(t) + x(t) = -d_1'(t)\sin t + d_2'(t)\cos t\,.$$

Należy więc rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} d_1'(t)\cos t + d_2'(t)\sin t = 0, \\ -d_1'(t)\sin t + d_2'(t)\cos t = \frac{2}{\cos t \sin t}. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\sin t$, drugie — przez $\cos t$ i dodając je potem stronami otrzymujemy równość $d_2'(t) = \frac{2}{\sin t}$. Analogicznie $d_1'(t) = -\frac{2}{\cos t}$. Wobec tego

$$d_1(t) = -\int \frac{2}{\cos t}\,dt = -\int \frac{2\cos t}{\cos^2 t}\,dt = -\int \frac{2\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt \overset{u=\sin t}{\underset{du=\cos t\,dt}{=\!=\!=\!=}} -\int \frac{2\,du}{1-u^2} = -\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du =$$

$$= \ln(1-u) - \ln(1+u) + K_1 = \ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t} + K_1\,.$$ Podobnie

$$d_2(t) = \int \frac{2}{\sin t}\,dt = \int \frac{2\sin t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{2\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt \overset{u=\cos t}{\underset{du=-\sin t\,dt}{=\!=\!=\!=}} -\int \frac{2\,du}{1-u^2} = -\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du =$$

$$= \ln(1-u) - \ln(1+u) + K_2 = \ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t} + K_2\,.$$

Wobec tego

$$x(t) = \cos t \cdot \ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t} + \sin t \cdot \ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t} + K_1 \cos t + K_2 \sin t\,.$$

K_1, K_2 oznaczają tu dowolne liczby. ■

---

5. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego
$$x''(t)+6x'(t)+9x(t)=216t^2e^{-3t}+216t^2e^{3t}+9t^2+12t+2\,,$$
które spełnia warunek początkowy $x(0)=2\,,\ x'(0)=-3\,.$

Rozwiązanie. Zaczniemy, jak zwykle w przypadku równania liniowego, od rozwiązania równania jednorodnego: $x''(t)+6x'(t)+9x(t)=0$. Pierwiastkiem podwójnym równania charakterystycznego $0=\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2$ jest liczba $\lambda_1=-3=\lambda_2$. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest więc funkcja $(c_1+c_2t)e^{-3t}$.

Znajdziemy kolejno rozwiązania szczególne trzech równań:
$x''(t)+6x'(t)+9x(t)=216t^2e^{-3t}$ $\quad$ $x''(t)+6x'(t)+9x(t)=216t^2e^{3t}$ oraz
$x''(t)+6x'(t)+9x(t)=9t^2+12t+2$.

Rozwiązania pierwszego równania poszukamy w postaci $w(t)e^{-3t}$. Mamy więc

$216t^2e^{-3t}=\big(w(t)e^{-3t}\big)''+6\big(w(t)e^{-3t}\big)'+9w(t)e^{-3t}=$
$=\big(w'(t)e^{-3t}-3w(t)e^{-3t}\big)'+6\big(w'(t)e^{-3t}-3w(t)e^{-3t}\big)+9w(t)e^{-3t}=$
$=w''(t)e^{-3t}-3w'(t)e^{-3t}-3w'(t)e^{-3t}+9w(t)e^{-3t}+6w'(t)e^{-3t}-18w(t)e^{-3t}+9w(t)e^{-3t}=$
$=w''(t)e^{-3t}$.

Stąd wynika, że $w''(t)=216t^2$, zatem $w'(t)=72t^3+c_2$, więc $w(t)=18t^4+c_2t+c_1$.

Rozwiązania drugiego równania poszukamy w postaci $w(t)e^{3t}$. Mamy więc

$216t^2e^{3t}=\big(w(t)e^{3t}\big)''+6\big(w(t)e^{3t}\big)'+9w(t)e^{3t}=$
$==\big(w'(t)e^{3t}+3w(t)e^{3t}\big)'+6\big(w'(t)e^{3t}+3w(t)e^{3t}\big)+9w(t)e^{3t}=$
$=w''(t)e^{3t}+3w'(t)e^{+3t}+3w'(t)e^{3t}+9w(t)e^{3t}+6w'(t)e^{3t}+18w(t)e^{3t}+9w(t)e^{3t}=$
$=\big(w''(t)+12w'(t)+36w(t)\big)e^{3t}$,

zatem $w''(t)+12w'(t)+36w(t)=216t^2$. Stopień wielomianu w musi być równy 2, zatem muszą istnieć takie liczby A,B,C, że $w(t)=At^2+Bt+C$ dla każdej liczby $t\in\mathbb{R}$. Mamy wtedy:
$216t^2=w''(t)+12w'(t)+36w(t)=2A+12(2At+B)+36(At^2+Bt+C)=$
$=36At^2+(24A+36B)t+2A+12B+36C$. Ponieważ ta równość ma zachodzić dla wszystkich liczb $t\in\mathbb{R}$, więc $36A=216$, zatem $A=\frac{216}{36}=6$; $0=24A+36B=6\cdot24+36B$, zatem $B=-\frac{6\cdot24}{36}=-\frac{24}{6}=-4$; $0=2A+12B+36C=2(6-6\cdot4+18C)=2(-18+18C)$, więc $C=1$. Rozwiązaniem szczególnym Drugiego równania jest funkcja $(6t^2-4t+1)e^{3t}$.

Zajmiemy się teraz równaniem $x''(t)+6x'(t)+9x(t)=9t^2+12t+2$. Można spodziewać się rozwiązania postaci At^2+Bt+C. Podstawiamy tę wielkość w miejsce $x(t)$:
$9t^2+12t+2=2A+6(2At+B)+9(At^2+Bt+C)=9At^2+(9B+12A)t+9C+6B+2A$.
Wynika stąd, że $A=1$; $9B+12\cdot1=12$, zatem $B=0$; $2=9\cdot C+6\cdot0+2\cdot1$, zatem $C=0$.

Z otrzymanych szczególnych rozwiązań można skonstruować rozwiązanie ogólne wyjściowego równania: $x(t)=18t^4e^{-3t}+(6t^2-4t+1)e^{3t}+t^2+(c_1+c_2t)e^{-3t}$.

Z równości $2=x(0)=1+c_1$ wynika, że $c_1=1$. Z równości $-3=x'(0)=-4+3-3c_1+c_2$ i tego, że $c_1=1$ wynika, że $c_2=1$. ■