

Matematyka A, kolokwium, 23 marca 2011, 18:15 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. Niech $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ dla $x \in [3, 7]$.

(5 pt.) Znaleźć długość wykresu funkcji f .

(5 pt.) Znaleźć odległość środka masy tego wykresu od osi OY .

Zakładamy, że masa jest rozłożona równomiernie, tzn. że jest masa dowolnego łuku jest proporcjonalna do jego długości

2. (10 pt.) Rozwiązać równanie $z^6 + 2z^4 + 8z^2 - 32 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

3. Niech C oznacza czworościan (ostrosłup trójkątny) o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ i $(0, 0, 4)$. Niech C_g będzie zbiorem złożonym z tych punktów (x, y, z) czworościanu C , dla których $z \geq 2$, C_d — zbiorem złożonym z tych punktów (x, y, z) czworościanu C , dla których $z \leq 2$, a T — trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(a, 0)$ i $(0, a)$, $a > 0$.

(2 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) trójkąta T .

(4 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) czworościanu C .

(1 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) czworościanu C_g .

(3 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) pięciościanu C_d .

4. (10 pt.) Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ wokół osi OX .

5. (10 pt.) Obliczyć $(1 + i\sqrt{3})^{15}$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $2^3 = 8$, $3^6 = 729$, $2^9 = 512$, $2^{12} = 4096$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $11^5 = 161051$, $11^6 = 1771561$, $11^7 = 12400927$, $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$, $7^6 = 117649$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.