Matematyka A, kolokwium, 23 marca 2011, 18:15 – 20:00

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $f(x)=\ln(x^2-1)$ dla $x\in[3,7]$.

(5 pt.) Znaleźć długość wykresu funkcji f.

(5 pt.) Znaleźć odległość środka masy tego wykresu od osi OY.

Zakładamy, że masa jest rozłożona równomiernie, tzn. że jest masa dowolnego łuku jest proporcjonalna do jego długości

Rozwiązanie. Długość tego wykresu to $\int_3^7\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Ponieważ $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$, więc $1+(f'(x))^2=1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1+4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$, zatem $1+(f'(x))^2=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. Wobec tego długość jest równa $\int_3^7\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=\int_3^7\big(1+\frac{2}{x^2-1}\big)\,dx=\int_3^7\big(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\big)\,dx=$ $=\big(x+\ln(x-1)-\ln(x+1)\big)\Big|_3^7=(7+\ln 6-\ln 8)-(3+\ln 2-\ln 4)=4+\ln\frac32$.

Odległość środka masy od osi OY, to po prostu pierwsza współrzędna tego środka, więc

$$\frac{\int_3^7 x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_3^7\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}=\frac{\int_3^7 x\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx}{4+\ln\frac32}=\frac{\int_3^7\big(x+\frac{2x}{x^2-1}\big)\,dx}{4+\ln\frac32}=\frac{\big(\frac12x^2+\ln(x^2-1)\big)\Big|_3^7}{4+\ln\frac32}=$$

$$=\frac{\frac{49}{2}+\ln 48-\frac92-\ln 8}{4+\ln\frac32}=\frac{20+\ln 6}{4+\ln\frac32}\approx 4{,}95\,.$$

Ostatnie przybliżenie to już nie jest część zadania, ale informacja dla tych których mogło by to zainteresować.

Całki $\int\frac{2x}{x^2-1}\,dx$ oczywiście nie obliczamy, bo rozwiązanie zaczęło się od równości $\big(\ln(x^2-1)\big)'=\frac{2x}{x^2-1}$ — pozdrawiam tych, którzy jednak obliczali.

---

2. (10 pt.) Rozwiązać równanie $z^6+2z^4+8z^2-32=0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

Rozwiązanie. Niech $w=z^2$. Wtedy $0=w^3+2w^2+8v-32=(w-2)(w^2+4w+16)==(w-2)\big((w+2)^2+12\big)$. Wobec tego $w=2$ lub $w+2=\sqrt{-12}=\pm2\sqrt3 i$, czyli $w=-2\pm2\sqrt3 i$. Wynika stąd, że $z_1=-\sqrt2$, $z_2=\sqrt2$, $z_3=\sqrt{-2-2\sqrt3 i}$, $z_4=-\sqrt{-2-2\sqrt3 i}$, $z_5=\sqrt{-2+2\sqrt3 i}$, $z_6=-\sqrt{-2+2\sqrt3 i}$. Mamy $-2-2\sqrt3 i=4\big(-\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\big)=4\big(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\big)$, zatem $z_3=$ $=2\big(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\big)=2\big(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\big)=-1+i\sqrt3$. Analogicznie $z_4=1-i\sqrt3$. Ponieważ $-2+2\sqrt3 i=4\big(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\big)=4\big(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\big)$, więc $z_5=2\big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\big)=1+i\sqrt3$. Stąd $z_6=-z_5=-1-i\sqrt3$.

Uwaga. Trygonometria nie jest w ostatniej fazie konieczna. Można postąpić tak. Jeśli $z^2=$ $=-2-2i\sqrt3$ i $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, to $x^2-y^2=-2$ oraz $2xy=-2\sqrt3$, więc $y=-\frac{\sqrt3}{x}$. Stąd $x^2-\frac{3}{x^2}=-2$, czyli $x^4+2x^2-3=0$. Wobec tego $(x^2+1)^2-4=0$, zatem $x^2=1$ (przypominamy, że $x^2\geq0$, bo $x\in\mathbb{R}$). Wobec tego $z=1-i\sqrt3$ lub $z=-1+i\sqrt3$. Podobne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku $z^2=-2+2i\sqrt3$, Otrzymujemy wtedy $z=1\pm i\sqrt3$.

---

3. Niech C oznacza czworościan (ostrosłup trójkątny) o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ i $(0,0,4)$. Niech C_g będzie zbiorem złożonym z tych punktów (x,y,z) czworościanu C, dla których $z \geq 2$, C_d — zbiorem złożonym z tych punktów (x,y,z) czworościanu C, dla których $z \leq 2$, a T — trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(a,0)$ i $(0,a)$, $a>0$.

(2 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) trójkąta T.

(4 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) czworościanu C.

(1 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) czworościanu C_g.

(3 pt.) Znaleźć środek masy (jednorodnego) pięciościanu C_d.

Rozwiązanie. Na wykładzie udowodniono, że środek masy jednorodnego trójkąta, to punkt znany ze szkoły jako środek ciężkości trójkąta. czyli punkt przecięcia środkowych, tzn. punkt $\frac{1}{3}\big((0,0)+(a,0)+(0,a)\big)=(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$. Pole tego trójkąta to oczywiście $\frac{1}{2}a^2$.

Czworościan C to oczywiście zbiór złożony z tych wszystkich punktów (x,y,z), dla których $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ i $x+y+z\leq 4$. Przy ustalonym z otrzymujemy trójkąt o wierzchołkach $(0,0,z)$, $(4-z,0,z)$ i $(0,4-z,z)$. Jego środkiem masy jest punkt $\big(\frac{4-z}{3},\frac{4-z}{3},z\big)$ z masą $\frac{1}{2}(4-z)^2$. Mamy zatem

$$x_S=\frac{\int_0^4\frac{4-z}{3}\frac{1}{2}(4-z)^2\,dz}{\int_0^4\frac{1}{2}(4-z)^2\,dz}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\int_0^4(4-z)^3\,dz}{\int_0^4(4-z)^2\,dz}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{4}(4-z)^4|_0^4}{-\frac{1}{3}(4-z)^3|_0^4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}4^4}{\frac{1}{3}4^3}=1\,.$$

Podobnie przekonujemy się, że $y_S=1$ i $z_S=1$. Wobec tego środkiem czworościanu C jest punkt $S=(1,1,1)$.

Czworościan C_g jest podobny do czworościanu C w skali $\frac{1}{2}$. Dokładniej, można uzyskać go z czworościanu C stosując najpierw jednokładność w skali $\frac{1}{2}$ względem $(0,0,0)$, a potem przesuwając o wektor $[0,0,2]$. Z punktu $(1,1,1)$ otrzymujemy $S_g=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})+[0,0,2]=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

Jeśli $S_d=(x,y,z)$ oznacza środek ciężkości pięciościanu C_d, to zachodzi równość:

$$\frac{1}{8}S_g+\frac{7}{8}S_d=S\,.$$

Wynika to stąd, że masa czworościanu C_g jest 8 razy mniejsza niż masa czworościanu C i wobec tego masa pięciościanu C_d to $\frac{7}{8}$ masy czworościanu C. Stąd mamy równania $\frac{1}{2}+7x=8$, $\frac{1}{2}+7y=8$ i $\frac{5}{2}+7x=8$. Stąd od razu wynika, że $x=y=\frac{15}{14}$ i $z=\frac{11}{14}$, więc $S_d=\big(\frac{15}{14},\frac{15}{14},\frac{11}{14}\big)$.

Uwaga 1. Oczywiście w celu znalezienia S_g i S_d można też obliczać całki. W przypadku pierwszej współrzędnej punktu S_g byłyby to $\dfrac{\int_2^4\frac{4-z}{3}\frac{1}{2}(4-z)^2\,dz}{\int_2^4\frac{1}{2}(4-z)^2\,dz}$, a w przypadku S_d:

$$\frac{\int_0^2\frac{4-z}{3}\frac{1}{2}(4-z)^2\,dz}{\int_0^2\frac{1}{2}(4-z)^2\,dz}$$

Uwaga 2. W przypadku trójkąta środek masy pokrywa się ze środkiem masy układu trzech punktów materialnych o równych masach, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta. Okazało się, że w przypadku tego konkretnego czworościanu zachodzi analogiczne twierdzenie: środek masy jednorodnego czworościanu pokrywa się ze środkiem masy układu czterech punktów materialnych o równych masach, umieszczonych w wierzchołkach czworościanu. Można udowodnić (łatwe!), że to twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego czworościanu.

4. **(10 pt.)** Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $y=\operatorname{tg} x$, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}$ wokół osi OX.

Rozwiązanie. Zgodnie z wzorem omówionym na wykładzie to pole jest równe całce

$$2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{tg} x\cdot\sqrt{1+((\operatorname{tg} x)')^2}\,dx = 2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx \overset{y=\cos^2 x}{\underset{dy=-2\cos x\sin x\,dx}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= -\pi\int_{3/4}^{1/4}\frac{1}{y}\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\,dy = \pi\int_{1/4}^{3/4}\frac{1}{y^2}\sqrt{y^2+1}\,dy \overset{y=\operatorname{tg}\alpha}{\underset{dy=\cos^{-2}\alpha\,d\alpha}{=\!=\!=\!=\!=}} \pi\int_{\operatorname{arctg}(1/4)}^{\operatorname{arctg}(3/4)}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \pi\int_{\operatorname{arctg}(1/4)}^{\operatorname{arctg}(3/4)}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\,d\alpha \overset{z=\sin\alpha}{\underset{dz=\cos\alpha\,d\alpha}{=\!=\!=\!=\!=}} \pi\int_{\sin(\operatorname{arctg}(1/4))}^{\sin(\operatorname{arctg}(3/4))}\frac{dz}{z^2(1-z^2)} =$$

$$= \pi\int_{\sin(\operatorname{arctg}(1/4))}^{\sin(\operatorname{arctg}(3/4))}\Big(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{1-z^2}\Big)\,dz = \pi\int_{\sin(\operatorname{arctg}(1/4))}^{\sin(\operatorname{arctg}(3/4))}\Big(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2(1-z)}+\frac{1}{2(1+z)}\Big)\,dz =$$

$$= \pi\Big(-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\ln(1-z)+\frac{1}{2}\ln(1+z)\Big)\Big|_{\sin(\operatorname{arctg}(1/4))}^{\sin(\operatorname{arctg}(3/4))} = \pi\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z^2}-\frac{1}{z}\Big)\Big|_{\sin(\operatorname{arctg}(1/4))}^{\sin(\operatorname{arctg}(3/4))} =$$

$$= \pi\Big(\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}\Big)\Big|_{\operatorname{arctg}(1/4)}^{\operatorname{arctg}(3/4)} = \pi\Big(\ln\big(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\big)-\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\Big)\Big|_{\operatorname{arctg}(1/4)}^{\operatorname{arctg}(3/4)} =$$

$$= \pi\Big(\ln\big(\sqrt{1+y^2}+y\big)-\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\Big)\Big|_{1/4}^{3/4} =$$

$$= \pi\ln\Big(\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\frac{3}{4}\Big)-\pi\sqrt{1+\frac{16}{9}}-\pi\ln\Big(\sqrt{1+\frac{1}{16}}+\frac{1}{4}\Big)+\pi\sqrt{1+\frac{16}{1}} =$$

$$= \pi\Big(\ln 2-\frac{5}{3}-\ln\frac{1+\sqrt{17}}{4}+\sqrt{17}\Big) = \pi\Big(\sqrt{17}-\frac{5}{3}-\ln\frac{1+\sqrt{17}}{8}\Big)\approx 9{,}11728\,.$$

To były podstawienia, które pokazywałem na zajęciach. Jednak to nie jest najprostsza metoda. W szczególności obliczanie całki wyglądałoby prościej, gdybym obliczał najpierw całkę nieoznaczoną, a granicami zajął się na końcu. Oczywiście ostatnie przybliżenie nie jest częścią rozwiązania — to dodatkowa informacja.

Pokażę teraz trochę krótsze rozwiązanie za pomocą nieco innych podstawień. Mamy

$$2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{tg} x\cdot\sqrt{1+((\operatorname{tg} x)')^2}\,dx = 2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{tg} x\cdot\sqrt{1+\cos^{-4}x}\,dx \overset{u=\cos^{-2}x}{\underset{du=2\cos^{-3}x\sin x\,dx}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \pi\int_{4/3}^{4}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du \overset{u=\frac{t^2-1}{2t},\ t>0}{\underset{du=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2})\,dt}{=\!=\!=\!=\!=}} {}^{*}\,\pi\int_{3}^{4+\sqrt{17}}\frac{\frac{t^2+1}{2t}}{\frac{t^2-1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{3}^{4+\sqrt{17}}\frac{(t^2+1)^2}{t^2(t^2-1)}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{3}^{4+\sqrt{17}}\left(\frac{t^2+2}{t^2-1}+\frac{1}{t^2(t^2-1)}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_{3}^{4+\sqrt{17}}\left(\frac{t^2+2}{t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{3}^{4+\sqrt{17}}\left(1+\frac{4}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_{3}^{4+\sqrt{17}}\left(1+\frac{2}{t-1}-\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(t+2\ln(t-1)-2\ln(t+1)+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{3}^{4+\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{17}+2\ln(3+\sqrt{17})-2\ln 2-2\ln(5+\sqrt{17})+2\ln 4+\sqrt{17}-4-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(-\frac{5}{3}+\sqrt{17}+\ln\frac{2(3+\sqrt{17})}{5+\sqrt{17}}\right) = \pi\left(-\frac{5}{3}+\sqrt{17}+\ln\frac{2(3+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})}{25-17}\right) =$$

$$= \pi\left(-\frac{5}{3}+\sqrt{17}+\ln\frac{2(-2+2\sqrt{17})}{8}\right) = \pi\left(-\frac{5}{3}+\sqrt{17}+\ln\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

— mam nadzieję, że studenci sprawdzą, że to jest ten sam wynik, co w poprzednim sposobie.

---

* Jeśli $\frac{t^2-1}{2t}=4$ i $t>0$, to $t=4+\sqrt{17}$ — równanie kwadratowe; jeśli $\frac{t^2-1}{2t}=\frac{4}{3}$ i $t>0$, to $t=3$; $(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)=1$.

5. (10 pt.) Obliczyć $(1+i\sqrt{3})^{15}$.

Rozwiązanie. Mamy $\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^{\,2}} = 2$. Jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i jednocześnie $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Wobec tego $1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, zatem

$$(1+i\sqrt{3}\,)^{15} = 2^{15}(\cos\tfrac{15\pi}{3} + i\sin\tfrac{15\pi}{3}) = 2^{15}(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)) = 32768\cdot(-1) = -32768\,.$$

Osoby, które nie pamiętały wzoru de Moivre'a mogły, biorąc pod uwagę to, że liczba 15 jest nieduża, obliczyć kilka pierwszych potęg, przyjrzeć się wynikom i też obliczyć tę potęgę. Mianowicie: $\left(1+i\sqrt{3}\,\right)^2 = 1+2i\sqrt{3}+i^2\sqrt{3}^{\,2} = -2+2i\sqrt{3}$, $\left(1+i\sqrt{3}\,\right)^3 = \left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) = -2+2i^2\sqrt{3}^{\,2}+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3} = -2-6 = -8$, zatem $(1+i\sqrt{3}\,)^{15} = \left((1+i\sqrt{3}\,)^3\right)^5 = (-8)^5 = -32768$.

Zagadka. Dlaczego tyle osób wyszło kilkadziesiąt minut przed końcem kolokwium nie zrobiwszy tego zadania? Co w nim jest trudnego poza spamiętaniem, że $i^2 = -1$ oraz $(\sqrt{3}\,)^2 = 3$? A może trzeba też pamiętać, że ludzie są istotami myślącymi i przed zdecydowaniem się na wyjście z sali wziąć to pod uwagę? Dlaczego część z Państwa zakłada, że jeśli nie widać od razu rozwiązania, to już nie da się go znaleźć?
To nie jest tylko zrzędzenie starszego pana. Udało mi się zatrzymać kilka osób i niektóre z nich zrobiły to lub inne zadanie.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $2^3 = 8$, $3^6 = 729$, $2^9 = 512$, $2^{12} = 4096$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $11^5 = 161051$, $11^6 = 1771561$, $11^7 = 12400927$, $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$, $7^6 = 117649$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.