Matematyka A, egzamin poprawkowy, 14 lutego 2011, 13:40 — 16:50

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **3 pt.** Zdefiniować $\log_b c$ pamiętając o założeniach o c i b.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x-2)+\log_{10}(x-1)-2\log_{10}\sqrt[4]{4}=\frac{1}{2}\log_{10}36-\log_{10}(x+3)$.

---

2. **3 pt.** Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta.

7 pt. Rozwiązać nierówność $2\sin^4 t-5\sin^2 t+2>0$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. **10 pt.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g, jeśli $f(x)=\pi^2-4x^2$ i $g(x)=(2x+\pi)\cos x$.

---

4. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x\sin^2 x}$. Zachodzą wtedy równości $f'(x)=\frac{x\sin(2x)+\sin^2 x}{3\sqrt[3]{x^2\sin^4 x}}$ oraz

$f''(x)=\frac{-1-4x^2+(1+2x^2)\cos(2x)+2x\sin(2x)}{9\sqrt[3]{x^5\sin^4 x}}$. Funkcja $x\sin(2x)+\sin^2 x$ ma w przedziale **otwartym** $(0,2\pi)$ dokładnie dwa pierwiastki: $x_1\approx 1.8366$ i $x_2\approx 4.81584$.

Funkcja $-1-4x^2+(1+2x^2)\cos(2x)+2x\sin(2x)$ ma w przedziale **otwartym** $(0,2\pi)$ stały znak.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieją $f'(\pi)$ i $f'(2\pi)$. Jeśli istnieją, obliczyć je.

2 pt. Znaleźć te podprzedziały przedziału $[-2\pi,2\pi]$, na których funkcja f maleje i te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te podprzedziały przedziału $[-2\pi,2\pi]$, na których funkcja f jest wypukła i te, na których jest wklęsła.

4 pt. Naszkicować wykres funkcji f na przedziale $[-2\pi,2\pi]$ korzystając z uzyskanych informacji.

5. **(10 pt.)** Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{1+2x^2}+\cos x+2\cos\pi\right)\cdot 2^{\sin(4x)-\operatorname{tg}(3x)}}{\ln(1-5x)(\sin x-x)\cos(\operatorname{tg}x)\cdot\left(\sqrt{9+x}-2\right)}$;.

---

6. Niech $O=(0,0,0)$, $A=(2,-6,9)$, $B=(12,-3,-4)$, $C=(2,-1,2)$.

2 pt. Znaleźć iloczyn $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ i obliczyć pole trójkąta OAB.

2 pt. Obliczyć odległość punktu A od prostej OB.

2 pt. Obliczyć objętość czworościanu $OABC$.

2 pt. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

2 pt. Napisać równanie płaszczyzny OAB.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\sin x\big)'=\cos x$,

$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$.