Matematyka A, egzamin, 1 lutego 2011, 12:20 – 15:30

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **3 pt.** Zdefiniować $\log_d b$ pamiętając o założeniach o d i b.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x-2)+\log_{10}(x+2)-2\log_{10}2=\frac{1}{3}\log_{10}27-\log_{10}(x+5)$.

---

2. **3 pt.** Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta.

4 pt. Rozwiązać nierówność $16\sin^4 t-16\sin^2 t+3>0$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. **10 pt.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez proste $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$ i wykres funkcji $y=\cos x\sin x\ln(\sin x)$.

---

4. Niech $f(x)=x\sqrt[3]{\sin^2 x}$.

Zachodzą wtedy równości $f'(x)=\frac{2x\cos x+3\sin x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$, $f''(x)=\frac{-2(x\cos^2 x-6\cos x\sin x+3x\sin^2 x)}{9\sqrt[3]{\sin^4 x}}$. W przedziale **otwartym** $(0,2\pi)$ funkcja $2x\cos x+3\sin x$ ma dokładnie dwa pierwiastki: $x_1\approx 2{,}17463$ i $x_2\approx 5{,}00365$. Funkcja $x\cos^2 x-6\cos x\sin x+3x\sin^2 x$ ma w przedziale **otwartym** $(0,2\pi)$ dokładnie jeden pierwiastek: $x_3\approx 1{,}04447$.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieją $f'(\pi)$ i $f'(2\pi)$. Jeśli istnieją, obliczyć je.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje $f''(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.

2 pt. Znaleźć te podprzedziały przedziału $[-2\pi,2\pi]$, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te podprzedziały przedziału $[-2\pi,2\pi]$, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

3 pt. Naszkicować wykres funkcji f na przedziale $[-2\pi,2\pi]$ korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. **(10 pt.)** Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1-2\operatorname{tg}^2 x}-\cos x\right)\cdot 2^{\sin(3x)-\operatorname{tg}(2x)}}{\ln(1+9x)(\sin x-x)\cos(\operatorname{tg} x)\cdot\left(\sqrt{4+x}-1\right)}$.

---

6. Niech $O=(0,0,0)$, $A=(-2,2,3)$, $B=(-3,2,6)$, $C=(2,-1,2)$.

2 pt. Znaleźć iloczyn $[O,A]\times[O,B]$ i obliczyć pole trójkąta OAB.

2 pt. Obliczyć odległość punktu A od prostej OB.

2 pt. Obliczyć objętość czworościanu $OABC$.

2 pt. Obliczyć odległość punktu C od płaszczyzny OAB.

2 pt. Znaleźć sinus kąta jaki tworzy wektor $[OC]$ z płaszczyzną OAB.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\left(\cos x\right)'=-\sin x$,

$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$.