Matematyka A, kolokwium, 5 stycznia 2011, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Znaleźć liczbę różnych pierwiastów rzeczywistych równania $x^3+3ax+a^3=0$ w zależności od parametru $a\in\mathbb{R}$.

---

2. (10 pt.) Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)e^{\sin(2x)-\operatorname{tg}(3x)}}{\ln(1+5x)(\operatorname{tg}x-x)\cos(\operatorname{tg}x)}$.

---

3. Niech $f(x)=\frac{(x+1)(x+7)}{x-1}$ dla $x\neq 1$. Wiadomo, że $f'(x)=\frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$ oraz $f''(x)=\frac{32}{(x-1)^3}$.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i te, na których jest malejąca.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji f.

(2 pt.) Znaleźć asymptoty funkcji f.

(4 pt.) W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Niech $\varphi(x)=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+7)}{x-1}}$ dla $x\neq 1$. Wiadomo, że dla $x\notin\{-1,1,5,-7\}$ zachodzą wzory

$\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x+3)(x-5)\sqrt[3]{(x-1)^{-4}(x+1)^{-2}(x+7)^{-2}}$ oraz

$\varphi''(x)=\frac{2}{9}(111+324x+74x^2+4x^3-x^4)\sqrt[3]{(x-1)^{-7}(x+1)^{-5}(x+7)^{-5}}$ przy czym $\varphi''(x)=0\Leftrightarrow$

$x=x_1\approx -0{,}3738$ lub $x=x_2\approx 12{,}2555$, $\varphi^{(3)}(x_1)\neq 0\neq\varphi^{(3)}(x_2)$.

(1 pt.) Znaleźć $\varphi'(-1)$ oraz $\varphi'(-7)$ lub wykazać, że te pochodne nie istnieją.

(1 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ rośnie i te, na których maleje.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ jest wypukła i te na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji φ.

(2 pt.) Wykazać, że jeśli $13<s<t$, to $\varphi\big(\frac{4}{7}s+\frac{3}{7}t\big)>\frac{4}{7}\varphi(s)+\frac{3}{7}\varphi(t)$.

(4 pt.) W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji φ.

---

5. (10 pt.) Z helikoptera znajdującego się na wysokości 60 m nad powierzchnia morza wysłano promień światła do nurka znajdującego się na głębokości 40 m pod powierzchnią wody. Odległość **w poziomie** między helikopterem i nurkiem jest równa 110 m. Przyjmujemy, że prędkość światła w powietrzu to 300 000 km/s a — w wodzie to 225 000 km/s. Wiedząc, że światło „wybiera” taką drogę, na przebycie której potrzeba najmniej czasu, znaleźć punkt, w którym promień wszedł do wody, tzn. znaleźć odległość tego punktu od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się helikopter. *Może warto coś narysować?* **Wygodną jednostką w tym zadaniu jest 1 dam = 10 m (dekametr).** Pomnożyć zawsze się zdąży, a pomyśleć? W dekametrach szukana odległość to nieduża całkowita.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\cos x\big)'=-\sin x$

$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$.