Matematyka A, kolokwium, 5 stycznia 2011 — rozwiązania

Tekst rozszerzony 13 lutego, godz.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.
Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(10 pt.)** Znaleźć liczbę różnych pierwiastów rzeczywistych równania $x^3+3ax+a^3=0$ w zależności od parametru $a\in\mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Niech $f_a(x)=x^3+3ax+a^3$. Jeśli $|x|$ jest ,,dostatecznie duże", to liczby $f(x)$ x mają ten sam znak, np.

$$f(|a|+1)=(|a|+1)^3+3a(|a|+1)+a^3=|a|^3+3|a|^2+3|a|+1+3a|a|+3a+a^3=$$
$$=\big(|a|^3+a^3\big)+3|a|(|a|+a)+3(|a|+a)+1\ge 1>0\,,$$
$$f(-|a|-1)=-(|a|+1)^3-3a(|a|+1)+a^3=-|a|^3-3|a|^2-3|a|-1-3a|a|-3a+a^3=$$
$$=\big(-|a|^3+a^3\big)-3|a|(|a|+a)-3(|a|+a)-1\le -1<0\,.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc $f(x_{1,a})=0$ dla pewnego $x_{1,a}\in(-|a|-1,|a|+1)$. Wykazaliśmy, że równanie $x^3+3ax+a^3$ ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(-|a|-1,|a|+1)$.

Mamy $f_a'(x)=3x^2+3a$. Jeli $a\ge 0$, to $f_a'(x)\ge 0$ dla wszystkich liczb x, przy czym równo $f_a'x)=0$ zachodzi w co najwyżej jednym punkcie (dla $a=0$ zachodzi równość $f_a(0)=0$, poza tym nierówność jest ostra). Wynika stąd, że dla $a\ge 0$ funkcja f_a ma **co najwyżej** jeden pierwiastek, bo jest ściśle rosnąca. Wobec tego dla każdej liczby $a\ge 0$ równanie $f_a(x)=x^3+3az+a^3$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Jeśli $a<0$, to pochodna $f_a'(x)>0$, gdy $x^2+a>0$, czyli gdy $x<-\sqrt{-a}$ lub gdy $x>\sqrt{-a}$. Wynika stąd, że funkcja f_a jest ści'sle rosnąca na każdej z półprostych $\big(-\infty,-\sqrt{-a}\,\big]$, $\big[\sqrt{-a},\infty\big)$, więc w każdej z nich ma nie więcej niż jeden pierwiastek. Jeśli $-\sqrt{-a}<x<\sqrt{-a}$, to $f'(x)<0$, więc na przedziale $\big[-\sqrt{-a},\sqrt{-a}\,\big]$ funkcja f_a jest ściśle malejąca, więc ma w nim co najwyżej jeden pierwiastek.

Mamy $f_a\big(\sqrt{-a}\,\big)=\big(\sqrt{-a}\,\big)^3+3a\big(\sqrt{-a}\,\big)+a^3=-a\sqrt{-a}+3a\sqrt{-a}+a^3=a\sqrt{-a}\big(2-a\sqrt{-a}\,\big)$. Ponieważ $2-a\sqrt{-a}>0$, więc $f_a\big(\sqrt{-a}\,\big)<0$ dla każdego $a<0$.

Mamy $f_a\big(-\sqrt{-a}\,\big)=\big(-\sqrt{-a}\,\big)^3+3a\big(-\sqrt{-a}\,\big)+a^3=a\sqrt{-a}-3a\sqrt{-a}+a^3=a\sqrt{-a}\big(-2-a\sqrt{-a}\,\big)$. Nierówność $-2-a\sqrt{-a}<0$ jest równoważna nierówności $-a\sqrt{-a}<2$, a ta nierówności $-a^3<4$, czyli $a>-\sqrt[3]{4}$. Wobec tego

$$f_a\big(-\sqrt{-a}\,\big)>0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } 0>a>-\sqrt[3]{4}.$$

W tej sytuacji funkcja f_a ma po jednym pierwiastku w każdym ze zbiorów $(-\infty,-\sqrt[3]{4})$, $(-\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{4})$, $(\sqrt[3]{4},\infty)$, więc ma ich dokładnie trzy.

Jeśli $a=-\sqrt[3]{4}$, to $f_a(-\sqrt{-a}\,)=\big(-\sqrt[6]{4}\big)^3-3\sqrt[3]{4}\big(-\sqrt[6]{4}\big)+\big(-\sqrt[3]{4}\big)^3=-2+6-4=0$ (przypominamy, że $\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{\sqrt{4}}=\sqrt[3]{2}$), zatem w tym przypadku liczba $-\sqrt{-a}$ jest pierwiastkiem równania $x^3+3ax+a^3=0$. Jest to jedyny pierwiastek w półprostej $\big(-\infty,-\sqrt{-a}\,\big]$ i jednocześnie jedyny w przedziale $\big[-\sqrt{-a},\sqrt{-a}\,\big]$. Wobec tego dla $a=-\sqrt[3]{4}$ rówanie na dokładnie dwa pierwiastki. Są nimi: liczba $-\sqrt[6]{4}=-\sqrt[3]{2}$ i — jak można łatwo sprawdzić — liczba $2\sqrt[3]{2}$.

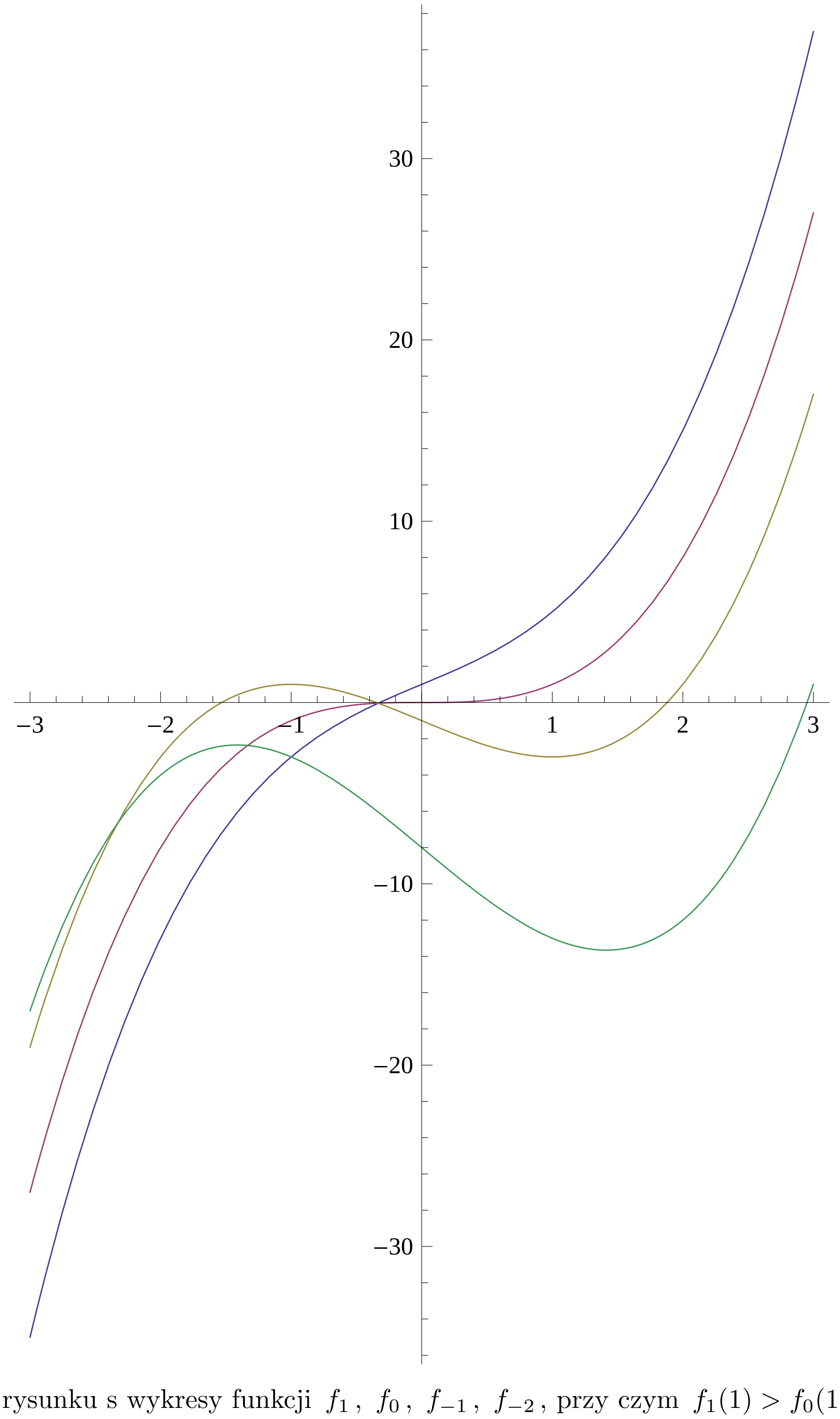
Jeśli $a<-\sqrt[3]{4}$, to $-2-a\sqrt{-a}>0$, więc $f_a(-\sqrt{-a}\,)<0$. Liczba $f_a(-\sqrt{-a}\,)$ jest największą wartością funkcji f_a na półprostej $\big(-\infty,\sqrt{-a}\,\big]$. Wynika stąd, że wszystkie wartości funkcji f_a

przyjmowane w punktach tej półprostej są ujemne. Żaden pierwiastek funkcji f_a nie leży więc na półprostej $(-\infty, \sqrt{-a}\,]$. Półrosta $(\sqrt{-a}, \infty)$ zawiera jeden pierwiastek funkcji f_a. Wobec tego funkcja f_a ma dokładnie jeden pierwiastek dla $a < -\sqrt[3]{4}$.

Uwaga. Nie jest koniecznym wskazywanie konkretnej liczby x, dla której $f_a(x) > 0$. Wystarczy stwierdzić, że taka liczba istnieje. Można to wywnioskować np. z tego, że

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 + 3ax + a^3) = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 + 3a\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{a^3}{x^3}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty .$$

Analogicznie funkcja f_a przyjmuje wartości ujemne, bo $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 3ax + a^3) = -\infty$.



Na rysunku s wykresy funkcji f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}, przy czym $f_1(1) > f_0(1) > f_{-1}(1) > f_{-2}(1)$, wic z prawej strony osi OY najwyżej jest wykres funkcji f_1, potem kolejno f_0, f_{-1}, f_{-2}.

2. (10 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)e^{\sin(2x)-\mathrm{tg}(3x)}}{\ln(1+5x)(\mathrm{tg}\, x - x)\cos(\mathrm{tg}\, x)}$.

Rozwiązanie i sposób myślenia nad zadaniem — tekst dr hab. Michała Szurka.

1. Dla nie lubiących myśleć zadanie jest proste. Różniczkujemy cztery razy licznik i mianownik (trzy razy to za mało) i stosujemy regułę de l'Hospitala. Przy pewnej wprawie tydzień rachunków może wystarczyć. Niestety, z powodów ekologicznych (oszczędność papieru) nie podaję tu owych pochodnych. Jeśli rzucimy okiem na wzór opisujący funkcję, to zadanie nieco się uprości.

2. Dla mało spostrzegawczych też nie jest źle. Rozwijamy wszystko na szereg Taylora, powiedzmy do czwartego stopnia. Różniczkujemy, różniczkujemy,... i rozwijamy. Otrzymujemy takie oto wyniki:

$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$;

$\cos(\mathrm{tg}\, x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$;

$\ln(1+5x) = 5x - \frac{25}{2}x^2 + \frac{125}{3}x^3 - \frac{625}{4}x^4 + o(x^4)$;

$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$;

$\exp(\sin(2x) - \mathrm{tg}(3x)) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x^3 + \frac{83}{8}x^4 + o(x^4)$;

$\mathrm{tg}\, x - x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$.

Mnożymy rozwinięcia, ale interesuje nas tylko współczynnik przy najniższej potędze, która rzeczywiście występuje. Licznik to $\big((1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)\big) \cdot (1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x^3 + \frac{83}{8}x^4) = = -\frac{1}{6}x^4\big(\frac{83}{8}x^4 - \frac{21}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1\big)$; a mianownik to $\big(5x - \frac{25}{2}x^2 + \frac{125}{3}x^3 - \frac{625}{4}x^4\big)\big(\frac{1}{3}x^3\big)\big(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4\big) = = \frac{5}{3}x^4 - \frac{25}{6}x^5 + \frac{235}{18}x^6 - 50x^7 - \frac{535}{72}x^8 + \frac{3925}{144}x^9 - \frac{875}{216}x^{10} + \frac{4375}{288}x^{11}$. A zatem szukaną granicą jest iloraz $-\frac{1/6}{5/3} = -\frac{1}{10}$.

3. Jak należy naprawdę? Być może w pierwszej chwili ogarnia nas przerażenie. Odrzucamy jednak hipotezę, że autor zadania jest sadystą i zaczynamy myśleć, w szczególności myślimy pozytywnie. Funkcja jest dana w postaci ułamka; zatem gdyby licznik i mianownik miały granice skończone, to granica ilorazu byłaby ilorazem granic i z pewnością dało by się wszystko obliczyć. Sprawdzamy. Pierwszy czynnik w liczniku dąży do zera, żal. Ale drugi? Hurra, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin(2x)-\mathrm{tg}(3x)} = e^{0-0} = 1$. Co w mianowniku? $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+5x) = \ln 1 = 0$, no ale funkcję logarytmiczną łatwo się różniczkuje (przypominamy sobie pochodną logarytmu!), więc jakby co, to się ,,delopitalem" potraktuje. Tangens iks minus iks? No, granica jest zero, ale po ewentualnym zróżniczkowaniu będzie $\frac{1}{\cos^2 x} - 1$, więc (znowu myślimy o regule de l'Hospitala), może się uda. Zapiszmy to, może chociaż za to będą jakieś punkty? Ostatecznie przecież coś zauważyłem! No, to może spróbujmy, co z tym okropnie wyglądającym kosinusem od tangensa? He,he, to tylko straszak, przecież $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\mathrm{tg}\, x) = \cos 0 = 1$.

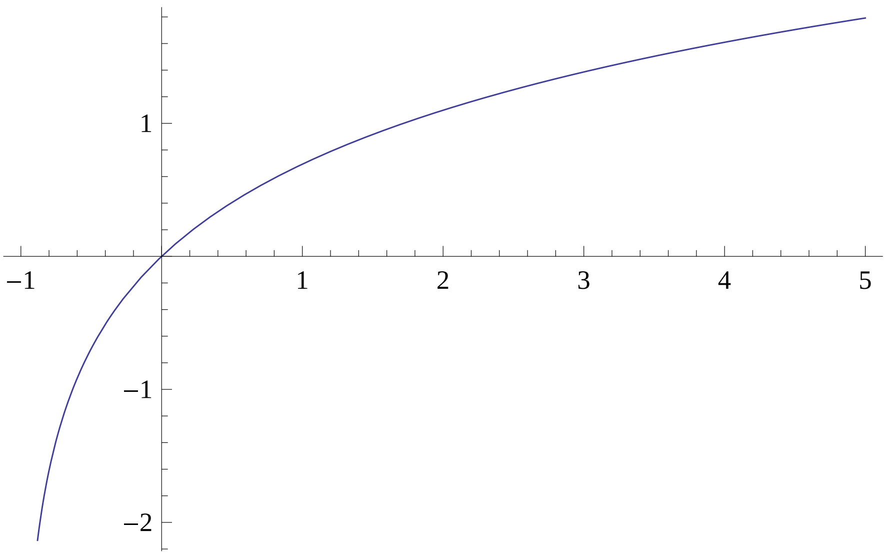
No, to chociaż wiemy tyle, że o ile granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)}{\ln(1+5x)(\mathrm{tg}\, x - x)}$ istnieje, to granica, o którą chodzi w zadaniu, jest taka sama, bowiem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)e^{\sin(2x)-\mathrm{tg}(3x)}}{\ln(1+5x)(\mathrm{tg}\, x - x)\cos(\mathrm{tg}\, x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)}{\ln(1+5x)(\mathrm{tg}\, x - x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)-\mathrm{tg}(3x)}}{\cos(\mathrm{tg}\, x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)}{\ln(1+5x)(\mathrm{tg}\, x - x)} \cdot 1\,.$$

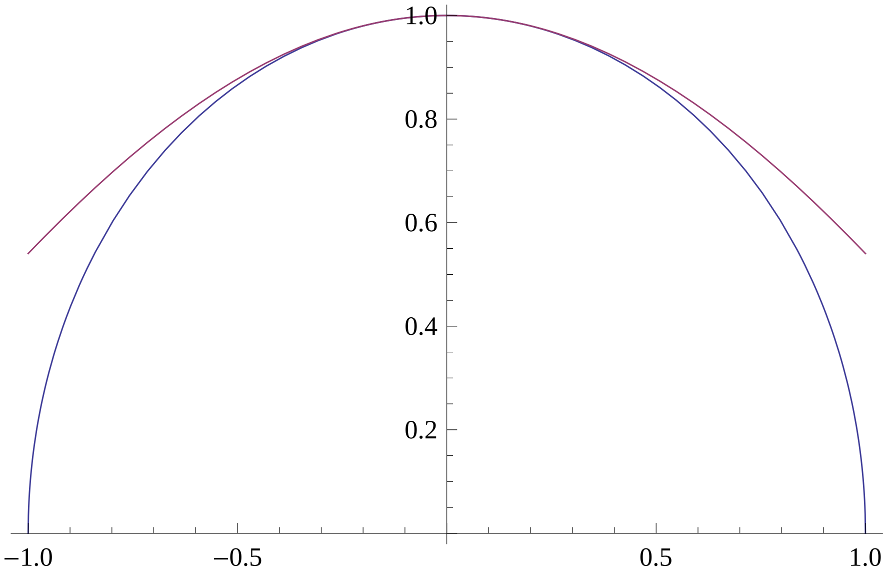
4. Wystarczy z tym myśleniem?

Jeśli uznajemy, że dosyć już myślenia na dzisiaj, wyłączamy tę funkcję mózgu i zaczynamy różniczkować. Sprawdzamy ilorazy pierwszych, drugich i trzecich pochodnych: nic z tego, zarówno licznik i mianownik dążą do zera. Próbujemy czwarte pochodne. Czwarta pochodna funkcji $\sqrt{1-x^2} - \cos x$ to $-\frac{18x^2}{(1-x^2)^{5/2}} - \frac{3}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{15x^4}{(1-x^2)^{7/2}} - \cos x$. Jej wartością w punkcie 0 jest -4 . Bez trudności obliczamy też czwartą pochodną funkcji $\ln(1+5x)\cdot(\operatorname{tg}x-x)$. Już po niespełna trzech godzinach mamy wynik, równy $\frac{1000\operatorname{tg}^2 x}{(1+5x)^3}+\frac{3750(x-\operatorname{tg}x)}{(1+5x)^4}-\frac{40(\cos(2x)-2)}{(1+5x)\cos^4 x}-\frac{300\operatorname{tg}x}{(1+5x)^2\cdot\cos^2 x}-\frac{2\ln(1+5x)(\sin(3x))}{\cos^5 x}$ Wartością tego wyrażenia w zerze jest 40. Zatem szukana granica jest równa $-\frac{1}{10}$. Zadanie rozwiązane, granica jest równa minus jedna dziesiąta. Tylko dlaczego w budynku już nikogo nie ma ...?

5. A może jednak pomyśleć? No, nic nie szkodzi, nie pobiją za to (przynajmniej w budynku Wydziału Matematyki). To co z tą granicą? Jak to mawiają fizycy? Nigdy nie bierz się do obliczeń, jeśli nie znasz odpowiedzi? Ale głupio i bez sensu! To jakieś porąbane! Nie, nigdy nie zrobię tego zadania ... Gdyby nie było tego $\sqrt{1-x^2}-\cos x$ w liczniku, to może by jakoś poszło ... Bo taki tangens to wygląda poczciwie. Aaa, właśnie, teraz pamiętam doskonale jak wygląda wykres tangensa ... Nawet mi było przykro, kiedy na ćwiczeniach pan mi powiedział coś niemiłego, bo wtedy nie pamiętałem. Tangens przytula się do iksa z zerze dość mocno, ojej, jak to jest , he, he, ... mam na kartce na dole (było na kartce z zadaniami!) rozwinięcie tangensa na szereg, no to jak odejmę iks, to co będzie? Wow, $\frac{1}{3}x^3$ plus reszta, ale ona jest stopnia czwartego albo wyższego. To teraz weźmy się za logarytm, z logarytmem nigdy nie jest trudno. Wykres funkcji $\ln(1+x)$?
E, to proste; przecież mam przed oczami, to tylko przesunięty logarytm:



W zerze nachylenie tej krzywej jest jeden, to widać. A rachunkowo też: pochodna logarytmu to $\frac{1}{x}$, a zatem w zerze jest równa ... brr, co jest, skąd tu minus nieskończoność? Ajajaj, głupi błąd, różniczkuję przecież $\ln(1+x)$, pochodna jego to $\frac{1}{1+x}$, a więc wszystko się zgadza. W otoczeniu zera funkcja $\ln(1+x)$ zachowuje się tak, jak x. Ojej, czyżby zadanie dało się zrobić? No, ale by to było ...! Na pewno wyjdę na najmądrzejszą osobę w grupie, skądinąd słusznie! Co jeszcze wygląda strawnie? Nie dam sobie rady z tym pierwszym czynnikiem $\sqrt{1-x^2}-\cos x$. Ale to musi dać się wyciągnąć, jak powiedział ślusarz do puzonisty. Ciągnijmy. Skoro się dało tyle, to tu na pewno też. Już, już zadanie puszcza ... Pierwiastek z jeden minus iks kwadrat? Skąd ja to znam? Aaa, to kawałek równania okręgu, o takiego ... Oj, koło zera wygląda on kosinusowato. To znaczy, że dla małych iks te funkcje są prawie równe. Aha, to dlatego granica jest zero! A więc $\sqrt{1-x^2}-\cos x$ jest dla liczb x bliskich zeru rzędu x^2, albo może rzędu x^3, albo co takiego. Zaraz sobie rozwinę na szereg. Wykres funkcji $y=\cos x$, a tu pod nim, na tym samym rysunku, wykres funkcji $\sqrt{1-x^2}$



Rety! Czyżbym umiał(a) rozwiązać to zadanie??? Licznik zachowuje się w pobliżu zera jak x^2 ;mianownik jak x mnożone przez x^3 ;to znaczy razem ..., no, coś nie tak, ale na pewno wyjdzie. Balzak powiedział kiedyś do swojego znajomego: ,,wiesz, skończyłem swoją najnowszą książkę. Pozostaje mi tylko ją napisać". No, to piszmy starannie. Ale już się mi nie wymkniesz, głupia granico!

6. Finale, allegro vivace! Zacznijmy od mianownika, bo to łatwiej. Mam na dole kartki podane rozwinięcie tangensa, a $ln(1+5x)$ umiem rozwijać, bo pochodne się łatwo liczą:

$\operatorname{tg} x - x = \frac{1}{3}x^3 +$ wyrazy stopni 5 i wyższych;

$\ln(1+5x) = 5x +$ wyrazy stopnia 2 i wyższych,
zatem początek rozwinięcia iloczynu na szereg wygląda tak:

$(\operatorname{tg} x - x)\ln(1+5x) = \frac{5}{3}x^4 +$ wyrazy stopni wyższych.

Teraz biegiem do licznika. Tu muszę trochę popracować (choć nie za wiele), żeby naprawdę wiedzieć, jak wygląda początek rozwinięcia. Z kosinusem łatwo, bo pamiętam, że pan na ćwiczeniach mówił, że rozwinięcie kosinusa trzeba pamiętać; z drugim wyrażeniem też nie jest źle, pierwiastek się przyjemnie różniczkuje (jak mówi pieśń gminna, zaraz lepiej się poczujesz, gdy pierwiastek zróżniczkujesz):

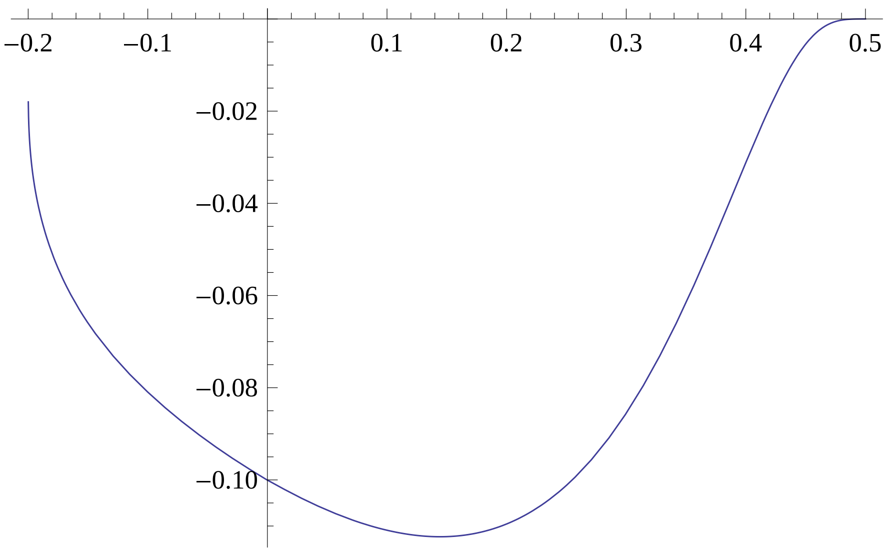
$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ + wyrazy stopnia co najmniej 6,

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 +$ wyrazy stopnia co najmniej 6.
A zatem różnica to $-\frac{1}{6}x^4 +$ wyrazy stopni wyższych.

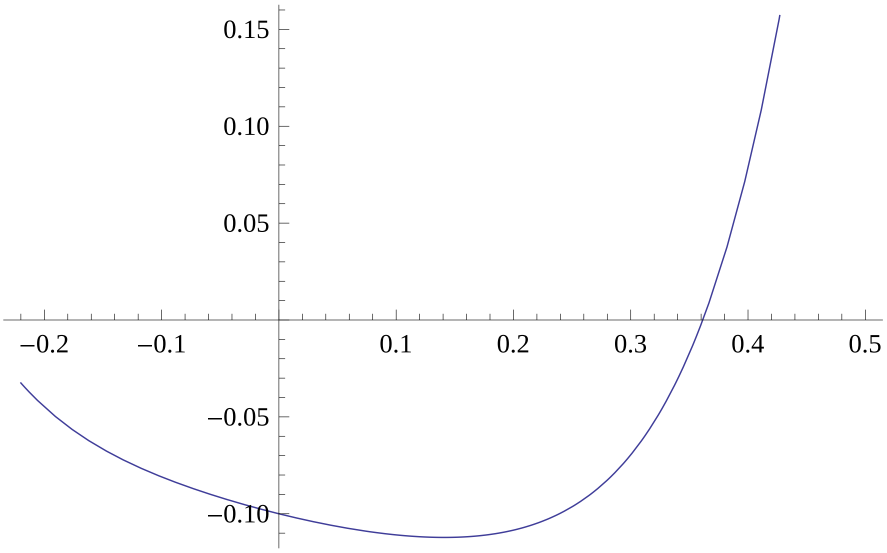
Szukana granica to granica ilorazu $\dfrac{-\frac{1}{6}x^4 + \text{wyrazy stopni wyższych}}{\frac{5}{3}x^4 + \text{wyrazy stopni wyższych}}$, a taka granica przy $x \longrightarrow 0$ jest równa $\frac{-1/6}{5/3}$, bo dzielę licznik i mianownik przez x^4, daję sobie radę z piętrowymi ułamkami i otrzymuję wynik końcowy: $-\frac{1}{10}$. Minus jedna dziesiąta! Ale numer!

7. Dodatek. A oto wykresy:

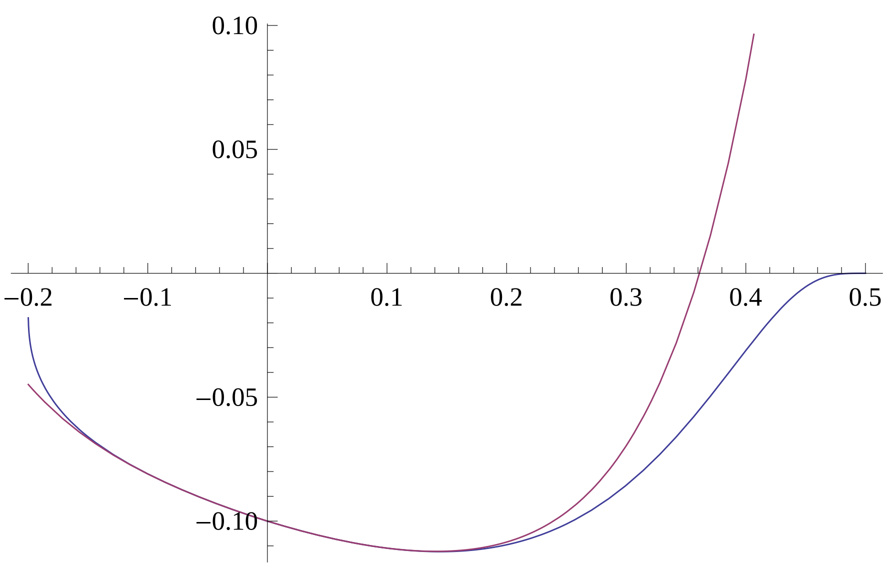
samej funkcji



i jej rozwinięcia w szereg Taylora do szóstego miejsca:



a tu oba wykresy na raz:



3. Niech $f(x) = \frac{(x+1)(x+7)}{x-1}$ dla $x \neq 1$. Wiadomo, że $f'(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$ oraz $f''(x) = \frac{32}{(x-1)^3}$.

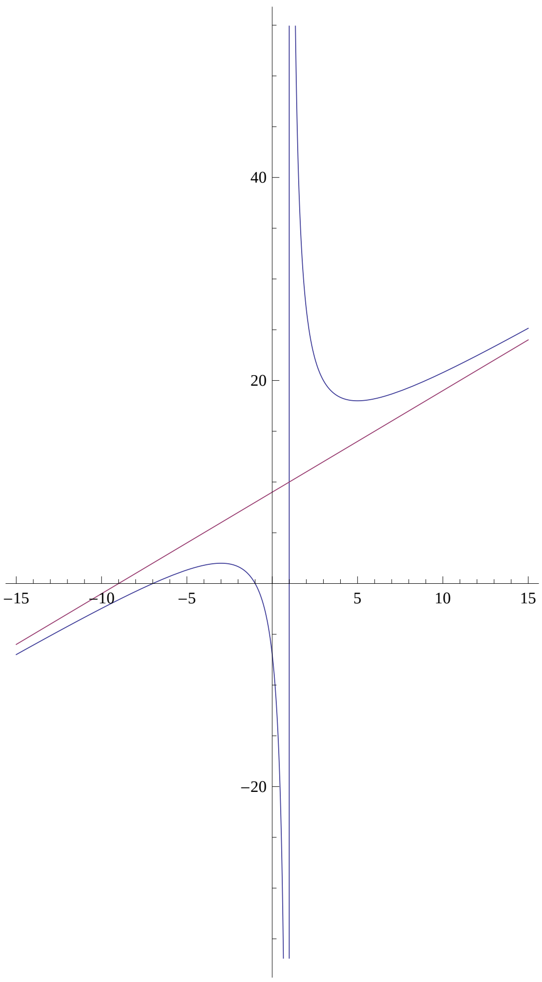
(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i te, na których jest malejąca.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji f.

(2 pt.) Znaleźć asymptoty funkcji f.

(4 pt.) W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji f.

Rozwiązanie Na znak pierwszej pochodnej mianownik ułamka nie ma wpływu. Licznik jest dodatni, gdy $x > 5$ (oba czynniki są wtedy dodatnie) lub gdy $x < -3$ (wtedy oba czynniki są ujemne). Na przedziale $(-3,5)$ licznik jest ujemny. Wynika stąd, że na każdej z półprostych $(-\infty,-3]$, $[5,\infty)$ funkcja f rośnie, a na każdym z przedziałów $[-3,1)$, $(1,5]$ — maleje. W punkcie -3 funkcja ma lokalne maksimum (jest to najwiksza wartość funkcji f spośród przyjmowanych na półprostej $(-\infty,1)$). W punkcie 1 funkcja f ma lokalne minimum (przyjmuje tu najmniejszą spośród przyjmowanych na półprostej $(1,\infty)$).



Druga pochodna jest ujemna dla $x < 1$, a dla $x > 1$ jest dodatnia. Wynika stąd, że funkcja f jest ściśle wklęsła na półprostej $(-\infty,1)$, a na półprostej $(1,\infty)$ jest ściśle wypukła. Punktów przegięcia nie ma (naturalny kandydat, punkt 1, jest POZA dziedziną funkcji!).

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x+7)}{x-1} = -\infty$ — granicą licznika jest $2\cdot 8 = 16$, a mianownika — 0 i mianownik jest ujemny, więc prosta pionowa $x = 1$ jest lewostronną asymptotą pionową funkcji f. Analogicznie $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x+7)}{x-1} = \infty$, więc prosta $x = 1$ jest też asymptotą prawostronną.

Ponadto mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x+7)}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+1/x)(1+7/x)}{1\cdot(1-1/x)} = \frac{(1+0)(1+0)}{1\cdot(1-0)} = 1.$$

Zachodzą też równości

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x+7)}{(x-1)} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x+7)-x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8x+7-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x+7}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{9+7/x}{1-1/x} = 9.$$

Wobec tego prosta $y = x+9$ jest asymptotą (ukośną) funkcji f przy $x \longrightarrow \infty$.

Dokładnie takie samo rozumowanie przekonuje nas, że jest też ona asymptotą przy $x \longrightarrow -\infty$.

4. Niech $\varphi(x)=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+7)}{x-1}}$ dla $x\neq 1$. Wiadomo, że dla $x\notin\{-1,1,5,-7\}$ zachodzą wzory

$\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x+3)(x-5)\sqrt[3]{(x-1)^{-4}(x+1)^{-2}(x+7)^{-2}}$ oraz

$\varphi''(x)=\frac{2}{9}\left(111+324x+74x^2+4x^3-x^4\right)\sqrt[3]{(x-1)^{-7}(x+1)^{-5}(x+7)^{-5}}$ przy czym $\varphi''(x)=0\Leftrightarrow$ $x=x_1\approx -0{,}3738$ lub $x=x_2\approx 12{,}2555$, $\varphi^{(3)}(x_1)\neq 0\neq\varphi^{(3)}(x_2)$.

(1 pt.) Znaleźć $\varphi'(-1)$ oraz $\varphi'(-7)$ lub wykazać, że te pochodne nie istnieją.

(1 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ rośnie i te, na których maleje.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ jest wypukła i te na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji φ.

(2 pt.) Wykazać, że jeśli $13<s<t$, to $\varphi\left(\frac{4}{7}s+\frac{3}{7}t\right)>\frac{4}{7}\varphi(s)+\frac{3}{7}\varphi(t)$.

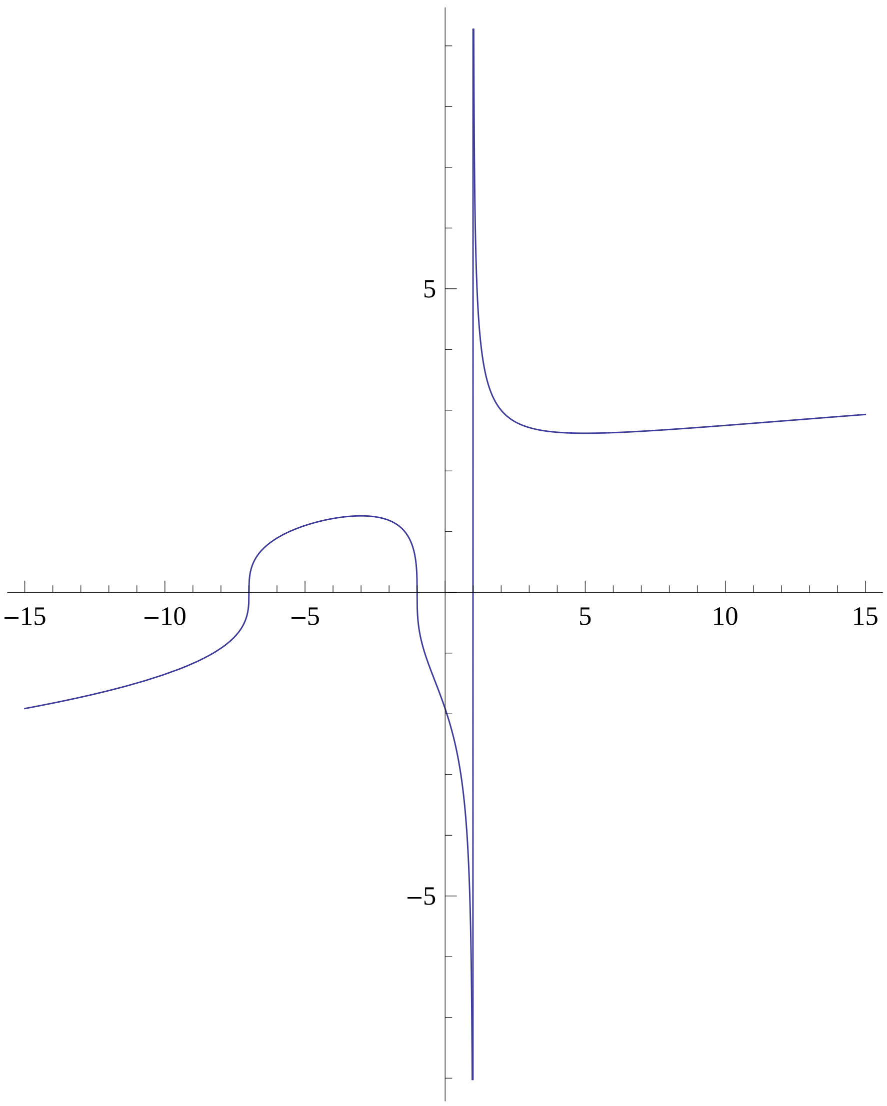
(4 pt.) W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji φ.

Rozwiązanie

Mamy $\varphi'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(-1+h)-\varphi(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\sqrt[3]{\frac{h(6+h)}{-2+h}}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}\frac{6+h}{-2+h}}=\sqrt[3]{\infty\cdot(-3)}=-\infty$.

Podobnie $\varphi'(-7)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(-7+h)-\varphi(-7)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\sqrt[3]{\frac{(-6+h)h}{-8+h}}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}\frac{-6+h}{-8+h}}=\sqrt[3]{\infty\cdot\frac{3}{4}}=\infty$.

Monotoniczność tej funkcji została zbadana w poprzednim zadaniu. Wynika to z równości $\varphi(x)=\sqrt[3]{f(x)}$, gdzie f to funkcja z poprzedniego zadania, i z tego, że funkcja $\sqrt[3]{x}$ jest ściśle rosnąca. Funkcja φ rośnie więc na każdej z półprostych $(-\infty,-3]$, $[5,\infty)$ funkcja f rośnie, a na każdym z przedziałów $[-3,1)$, $(1,5]$ — maleje.



Ponieważ $\varphi^{(3)}(x_1)\neq 0$, więc funkcja φ'' przyjmuje **w pobliżu** punktu x_1, po różnych jego stronach, wartości różnych znaków. Oznacza to, że x_1 jest punktem przegięcia funkcji φ. Analogicznie x_2. Podobnie jest z punktami -1 i -7, ale to wynika bezpośrednio z wzoru na drugą pochodną funkcji φ — czynniki $x+1$ oraz $x+7$ występują w nim w nieparzystych potęgach!. Druga pochodna zmienia też znak przy przejściu przez 1, ale liczba 1 nie jest elementem dziedziny funkcji, więc nie mówimy w tym przypadku o punkcie przegięcia, chociaż po jednej jego stronie funkcja na dostatecznie krótkim przedziale jest ściśle wypukła, a po drugiej — ściśle wklęsła. Uściślając, funkcja φ jest ściśle wypukła na każdym z przedziałów: $(1, x_2]$, $[-1, x_1]$, $(-\infty, 7]$, a na każdym z przedziałów: $[x_2, \infty)$, $[x_1, 1)$, $[-7, -1]$ jest ściśle wklęsła.

Nerówność $\varphi\big(\frac{4}{7}s + \frac{3}{7}t\big) > \frac{4}{7}\varphi(s) + \frac{3}{7}\varphi(t)$ wynika natychmiast z tego, że funkcja φ jest, jak wykazaliśmy przed chwilą, ściśle wklęsła na przedziale $[x_2, \infty)$, z definicji wklęsłości, z tego, że $\frac{4}{7}, \frac{3}{7} > 0$ i $\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$.

Na rysunku nie widać wklęsłości funkcji na półprostej $[x_2, \infty)$, bo pochodna φ' funkcji φ zmienia się bardzo wolno w rezultacie czego wygięcie wykresu jest nieznaczne. Należałoby narysować znacznie dłuższy przedział, ale wtedy nie byłyby widoczne inne rzeczy.

5. (10 pt.) Z helikoptera znajdującego się na wysokości 60 m nad powierzchnia morza wysłano promień światła do nurka znajdującego się na głębokości 40 m pod powierzchnią wody. Odległość **w poziomie** między helikopterem i nurkiem jest równa 110 m. Przyjmujemy, że prędkość światła w powietrzu to 300 000 km/s a — w wodzie to 225 000 km/s. Wiedząc, że światło ,,wybiera" taką drogę, na przebycie której potrzeba najmniej czasu, znaleźć punkt, w którym promień wszedł do wody, tzn. znaleźć odległość tego punktu od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się helikopter. *Może warto coś narysować?* **Wygodną jednostką w tym zadaniu jest 1 dam = 10 m (dekametr).** Pomnożyć zawsze się zdąży, a pomyśleć? W dekametrach szukana odległość to nieduża całkowita.

Rozwiązanie Ponieważ światło ,,oszczędza czas", więc porusza się w płaszczyźnie pionowej zawierającej punkt H, w którym znajduje się helikopter i punkt N, w którym znajduje się nurek. Załóżmy, że promień światła wchodzi w wodę w odległości x dekametrów, od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się punkt H. Światło przebywa więc w powietrzu drogę długości $\sqrt{6^2+x^2}$, a w wodzie $\sqrt{4^2+(11-x)^2}$. Trwa to $f(x)$ sekund, zatem

$$f(x)=\tfrac{1}{3}\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt{6^2+x^2}+\tfrac{1}{2{,}25}\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt{4^2+(11-x)^2}\,.$$

amy znaleźć najmniejszą wartość funkcji f na przedziale $(0,11)$. Obliczamy pochodną

$$f'(x)=\tfrac{1}{3}\cdot 10^{-7}\cdot\tfrac{x}{\sqrt{6^2+x^2}}-\tfrac{1}{2{,}25}\cdot 10^{-7}\cdot\tfrac{11-x}{\sqrt{4^2+(11-x)^2}}\,.$$

Jeśli funkcja f ma najmniejszą wartość w punkcie $x\in(0,11)$, to

$$0=f'(x)=\tfrac{1}{3}\cdot 10^{-7}\cdot\tfrac{x}{\sqrt{6^2+x^2}}-\tfrac{1}{2{,}25}\cdot 10^{-7}\cdot\tfrac{11-x}{\sqrt{4^2+(11-x)^2}}\,,$$

zatem $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{6^2+x^2}}=\frac{1}{2{,}25}\cdot\frac{11-x}{\sqrt{4^2+(11-x)^2}}$. Po pomnożeniu przez mianowniki otrzymujemy równość $2,25x\sqrt{4^2+(11-x)^2}=3(11-x)\sqrt{6^2+x^2}$, którą mnożymy przez $\frac{4}{3}$, by otrzymać w końcu

$$3x\sqrt{4^2+(11-x)^2}=4(11-x)\sqrt{6^2+x^2}\,.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymujemy $9x^2(16+(11-x)^2)=16(11-x)^2(36+x^2)$. Trochę wymnażamy, przenosimy z jednej strony na drugą i otrzymujemy

$$7x^2(11-x)^2=9\cdot16\cdot x^2-16\cdot36\cdot(11-x)^2=9\cdot16\cdot\big(x^2-4(11-x)^2\big)=$$
$$=9\cdot16\cdot\big(x-2(11-x)\big)\big(x+2(11-x)\big)=9\cdot16\cdot\big(3x-22\big)\big(22-x\big)\,.$$

Ponieważ $7x^2(11-x)^2\geq 0$, więc z otrzymanego równania i nierówności $0<x<11$ wynika, że $3x-22>0$, zatem $x>\frac{22}{7}$, a skoro obiecano, że to nieduża liczba całkowita, więc $x\in\{8,9,\}$. Podstawiając $x=8$ przekonujemy się, że liczba ta jest pierwiastkiem równania

$$7x^2(11-x)^2==9\cdot16\cdot\big(3x-22\big)\big(22-x\big)\,.$$

Chcę trochę uprościć obliczenia, więc podstawiam $x=t+8$ i przenoszę wszystkie wyrazy na jedną stronę: $0=7(t+8)^2(3-t)^2-9\cdot16\cdot(2+3t)(14-t)=7(t^2+16t+64)(t^2-6t+9)-9\cdot16(-t^2+40t+28)==7t^4+70t^3+271t^2-7440t$. Wykażę, że równanie $7t^3+70t^2+271t-7440=0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Mamy $\big(7t^3+70t^2+271t-7440\big)'=21t^2+140t+271$. $\Delta=140^2-4\cdot21\cdot271=4\cdot7(700-813)<0$, więc $21t^2+140t+271>0$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$. Wynika stąd, że funkcja $7t^3+70t^2+271t-7440$ jest ściśle rosnąca. Bez trudu stwierdzamy, że $7\cdot3^3+70\cdot3^2+271\cdot3-7440=7\cdot27+9\cdot70+3\cdot671-7440<210+700+2100-7440<0$. Wynika stąd, że jedyny pierwiastek wielomianu $7t^3+70t^2+271t-7440$ jest większy niż 8, zatem drugi pierwiastek wielomianu $7x^2(11-x)^2-9\cdot16\cdot\big(3x-22\big)\big(22-x\big)$ jest większy od 11.

Wykazaliśmy, że pochodna funkcji f zeruje się tylko w jednym punkcie przedziału $(0,11)$, mianowicie w punkcie 8. Z wzoru widać, że $f'(0)<0<f'(11)$. Stąd z kolei wynika, że na przedziale $(0,8]$ funkcja f maleje, a na przedziale $[8,11)$ — maleje. Jej najmniejszą wartością na

tym przedziale jest $f(8)$.

Wykazaliśmy, że światło wchodzi w wodę w odległości 8 dm od punktu na którym znajduje się punktu h

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\cos x\big)' = -\sin x$

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$.