Matematyka A, kolokwium, 24 listopada 2010, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\ln\big(\operatorname{tg}(3x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ **c. (3 pt).** $y = x^{(x^2)}$.

---

2. (4 pt.) Znaleźć równanie prostej L, która jest styczna do wykresu funkcji $x^3 - 3x^2 + 2x$ w punkcie $(1, 0)$.

(1 pt.) Jaki warunek spełniają liczby $k, m \in \mathbb{R}$, jeśli wektory $[1, k]$ i $[1, m]$ są prostopadłe?

(5 pt.) Na wykresie funkcji $x^3 - 3x^2 + 2x$ znaleźć punkt (x_0, y_0), w którym styczna jest prostopadła do prostej L.

---

3. (3 pt.) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

(1 pt.) Niech $f(x) = \sin x - \cos x$. Obliczyć $f(0)$ i $f(\frac{\pi}{3})$.

(6 pt.) Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2 \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ zachodzi nierówność

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq |x_1 - x_2|.$$

---

4. (3 pt.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p.

(7 pt.) Obliczyć pochodną $f'(1)$, jeśli $f(x) = (\sqrt{x} - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \cdot \log_{10}(x^3 + 2x^2 + 3x + 94)$.

---

5. (8 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^3 - 2x + 4x^4 + 1 + x^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2-1}\right)$.

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że jeśli $x > a$, to $\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2-1} > \sin\frac{\pi}{3}$?

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $\big(\sin(3x^2)\big)' = 6x\cos(3x^2)$, $\big(\ln(\cos x)\big)' = -\operatorname{tg} x$.