

Matematyka A, kolokwium, 3 listopada 2010, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (6 pt.) Dla jakich liczb rzeczywistych  $x$  zachodzi równość  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$ ?
- (2 pt.) Dla jakich liczb rzeczywistych  $x$  wektor  $[1, x, x^2]$  jest prostopadły do iloczynu wektorowego  $[1, 2, 4] \times [1, -2, 4]$ ?
- (2 pt.) Znaleźć punkt  $X$ , który dzieli odcinek o końcach  $(1, 2, 4)$ ,  $(4, 0, -1)$ , w stosunku  $3 : 2$ .
- 
2. (3 pt.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta  $t > 0$ .
- (3 pt.) Znaleźć kosinus kąta  $\alpha$  między wektorami  $[1, -2, 2]$  i  $[1, 4, 8]$ .
- (1 pt.) Niech  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Wykazać, że  $\beta > \frac{1}{3}$ .
- (3 pt.) Wykazać, że jeśli liczba  $b$  jest miarą kąta  $\beta$  w stopniach, to  $b > 17^\circ$ .
- 
3. (4 pt.) Podać definicję logarytmu liczby  $x$  przy podstawie  $y$ . Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?
- (6 pt.) Wykazać, że:  $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 + 5 \log 2 < 4 \log 7 < 4 \log 5 + 2 \log 2$ .
- 
4. (8 pt.) Znaleźć granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n^3 - 2n + 4n^4 + 1 + n^2} \cdot (\sqrt{n^2 + 12} - \sqrt{n^2 - 1})$ .
- (2 pt.) Czy istnieje taka liczba  $k \in \mathbb{N}$ , że jeśli  $n > k$ , to  $\sqrt{n^2 + 12} - \sqrt{n^2 - 1} > \sin \frac{\pi}{3}$ ?
- 
5. (2 pt.) Dla jakich  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi nierówność  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 > x$ , a dla jakich nierówność  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 < x$ ?
- (1 pt.) Dla jakich  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi nierówność  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 > 3$ , a dla jakich nierówność  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 < 3$ ?
- (1 pt.) Dla jakich  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi nierówność  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 > 1$ , a dla jakich nierówność  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 < 1$ ?
- (1 pt.) Niech  $a_1 \in \mathbb{R}$  i niech  $a_{n+1} = a_n^3 - 5a_n^2 + 8a_n - 3$ . Znaleźć  $a_2, a_3, a_4$ , gdy  $a_1 = 4$  oraz  $a_2, a_3, a_4$ , gdy  $a_1 = 2$ .
- (5 pt.) Dla jakich liczb  $a_1 \geq 1$  ciąg  $(a_n)$  ma granicę skończoną?
-