Matematyka A, egzamin, 3 września 2010, 10:05 — 13:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

---

1. Rozwiązać równanie różniczkowe $x'(t)\cos t + x(t)\sin t = 1$.
Znaleźć rozwiązanie x_1 tego równania spełniające warunek $x_1(0) = 2$ oraz rozwiązanie x_2 spełniające warunek $x_2(\frac{\pi}{4}) = 0$.

---

2. Znaleźć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że styczna do wykresu Γ_f funkcji f w punkcie $P(x) = \big(x, f(x)\big)$ przecina oś OX układu współrzędnych w punkcie $X(x) = \big(x-2, 0\big)$.

---

3. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych $\begin{cases} x'(t) = 9x(t) + 5y(t), \\ y'(t) = -13x(t) - 7y(t). \end{cases}$
Znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy $x(0) = -16$, $y(0) = 26$.

---

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 16e^{2t} + 16e^{-2t} + 50e^{2t}\cos(2t) + 50e^{2t}\sin(2t).$$

---

5. Niech $f(x,y) = y^2 + 3x^2y - x^3y$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad Q := \{(x,y)\colon \quad -1 \le x \le 4 \quad \text{i} \quad -3 \le y \le 1\}$.
Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, czy f ma w tych punktach lokalne maksima, lokalne minima lub siodła.
Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kwadracie Q.
Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ lub wykazać, że jedna z nich lub obie nie istnieją.

---

6. Niech $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A, również nierzeczywiste.

b. Znaleźć taką płaszczyznę $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącą przez punkt $(0,0,0)$, że jeśli $\vec{\mathbf{v}} \in \Pi$, to $A\vec{\mathbf{v}} \in \pi$.

c. Niech $\vec{\mathbf{x}} \in \Pi$ i $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Znaleźć iloraz $\frac{\|A\vec{\mathbf{v}}\|}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}$.

d. Niech $\vec{\mathbf{x}} \in \Pi$ i $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Znaleźć iloraz $\frac{A\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$.
