Matematyka A, egzamin, 21 czerwca 2010, 9:05 — 12:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

---

1. Rozwiązać równanie różniczkowe $t^2x'(t) + x(t) = t^2 + t$.
Znaleźć rozwiązanie x_1 tego równania spełniające warunek $x_1(1) = 2$ oraz rozwiązanie x_2 spełniające warunek $x_2(1) = 2 + e$.

---

2. Znaleźć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że jeśli $x \neq 0$, to styczna do wykresu Γ_f funkcji f w punkcie $P(x) = \big(x, f(x)\big)$ przecina oś OX układu współrzędnych w punkcie $X(x) = \big(\frac{2}{3}x, 0\big)$.

---

3. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) - 3y(t). \end{cases}$
Znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy $x(0) = 0$, $y(0) = 7$.

---

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = 100te^{2t} + 100te^{-2t} + 100\sin(2t) - 100e^{2t}\sin(2t).$$

---

5. Niech $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad Q := \{(x,y)\colon \quad -1 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad -1 \le y \le 1\}$.
Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, czy f ma w tych punktach lokalne maksima, lokalne minima lub siodła.
Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kwadracie Q.
Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ lub wykazać, że jedna z nich lub obie nie istnieją.

---

6. Niech $A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ 4 & 3 & 12 \\ 12 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Obliczyć $A \cdot \vec{\mathbf{u}}$. Czy $\vec{\mathbf{u}}$ jest wektorem własnym macierzy A; jeśli jest, to jakiej wartości własnej odpowiada?

b. Znaleźć takie liczby $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, że $A\cdot\vec{\mathbf{v}} = c_1\vec{\mathbf{v}} + c_2\vec{\mathbf{w}}$ oraz takie liczby $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, że $A\cdot\vec{\mathbf{w}} = d_1\vec{\mathbf{v}} + d_2\vec{\mathbf{w}}$.
Obliczyć $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$ i $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}}$.

c. Niech $\vec{\mathbf{x}}$ będzie takim wektorem, że $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = 0$ i $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Dowieść, że istnieją takie liczby α, β, że $\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}}$. Wykazać, że $\vec{\mathbf{u}}\cdot(A\vec{\mathbf{x}}) = 0$. Znaleźć $\frac{(A\vec{\mathbf{x}})\cdot\vec{\mathbf{x}}}{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}}}$.

d. Znaleźć, korzystając ewentualnie z **b** i **c**, takie wektory własne (niekoniecznie rzeczywiste) $\vec{\mathbf{r}}$ macierzy A, że $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{r}} = 0$. Jakim wartościom własnym odpowiadają?

Pytanie dodatkowe. Jakim przekształceniem geometrycznym jest funkcja, która wektorowi $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ przypisuje wektor $A\cdot\mathbf{r}$?

Ciekawostki: $3^2 + 4^2 + 12^2 = 12^2 + 12 + 13 = 12(12+1) + 13 = 13(12+1) = 13^2$, $2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2$.
