Matematyka A, kolokwium dodatkowe, 1 czerwca 2010, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b istnieją takie liczby całkowite x, y, że

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$.

Naszkicować wektory własne.

Czy istnieją takie wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$, że $\|A\vec{\mathbf{u}}\| < \|\vec{\mathbf{u}}\|$ i $\|A\vec{\mathbf{v}}\| > \|\vec{\mathbf{v}}\|$?

Czy istnieje taki niezerowy wektor $\vec{\mathbf{w}}$, że $\|A\vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\|$?

---

2. (10 pt.) Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ -3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^3.

Znaleźć macierz A^3.

---

3. (10 pt.) Niech $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^2.

Znaleźć macierz A^2.

Znaleźć wszystkie takie wektory $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$.

---

4. (10 pt.) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = -6x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 8x(t) + 5y(t). \end{cases}$

---

5. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x'(t) = -14x(t) + 25y(t), \\ y'(t) = -9x(t) + 16y(t), \end{cases}$

które spełnia warunek $x(0) = -2$, $y(0) = -1$.

Ciekawostka: $A(\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}}) = \alpha A\vec{\mathbf{v}} + \beta A\vec{\mathbf{w}}$, $\lambda(\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}}) = \alpha\lambda\vec{\mathbf{v}} + \beta\lambda\vec{\mathbf{w}}$ *dla każdej macierzy* A *i dla dowolnych wektorów* $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ *i dowolnych liczb* α, β, λ.