Matematyka A, kolokwium trzecie, 1 czerwca 2010, rozwiązania

1. (10 pt.) Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b istnieją takie liczby całkowite x, y, że

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$.

Naszkicować wektory własne.

Czy istnieją takie wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$, że $\|A\vec{\mathbf{u}}\| < \|\vec{\mathbf{u}}\|$ i $\|A\vec{\mathbf{v}}\| > \|\vec{\mathbf{v}}\|$?

Czy istnieje taki niezerowy wektor $\vec{\mathbf{w}}$, że $\|A\vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\|$?

Rozwiązanie **Pierwszy sposób**. Mamy $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 13 - 5\cdot(-5) = -1$, więc macierz A^{-1} odwrotna do macierzy $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$ ma całkowite współczynniki. Wobec tego, jeśli liczby a, b są całkowite, to liczby x, y też, bo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Drugi sposób. Mnożąc pierwsze równanie układu równań $\begin{cases} -2x + \ \ 5y = a \\ -5x + 13y = b \end{cases}$ przez -5, drugie przez 2 i dodając otrzymane równości stronami otrzymujemy $y = -5a + 2b$. Wynika stąd, że $2x = 5y - a = -26a + 10b$, zatem $x = -13a + 5b$. Wobec tego, jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, to również $x, y \in \mathbb{Z}$.

Uwaga. Właśnie wykazaliśmy, że $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, choć nikt nie zlecił nam tej pracy.

Znajdziemy wartości własne

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ -5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(13-\lambda) - (-5)\cdot 5 = \lambda^2 - 11\lambda - 1 = \left(\lambda - \tfrac{11}{2}\right)^2 - \tfrac{125}{4}.$$

Wobec tego $\lambda_1 = \frac{1}{2}(11 - \sqrt{125}) = \frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5})$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{125}) = \frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})$. Jeśli $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oznacza wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_1, to spełnione są równania $\begin{cases} -2x + \ \ 5y = \frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5})x \\ -5x + 13y = \frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5})y \end{cases}$, czyli $\begin{cases} 5y = \frac{1}{2}(15 - 5\sqrt{5})x \\ -5x = \frac{1}{2}(-15 - 5\sqrt{5})y \end{cases}$, czyli $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})x \\ x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})y \end{cases}$. Ponieważ $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = 1$, więc otrzymane równania są równoważne, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, więc ma niezerowe rozwiązania (których istnienie wynika zresztą z tego, że liczbę λ_1 wybraliśmy właśnie tak, by one istniały). Niech np. $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$. W identyczny sposób sprawdzamy, że wektor $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$, to wektor własny , który odpowiada wartości własnej $\lambda_2 = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{125})$.

Mamy $\lambda_2 = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{125}) > 1$, $\lambda_1\lambda_2 = -1$, więc $0 > \lambda_1 > -1$. Stąd i z definicji wektora własnego wynika, że $\|A\vec{\mathbf{v}}_1\| = \|\lambda_1\vec{\mathbf{v}}_1\| = |\lambda_1|\|\vec{\mathbf{v}}_1\| < \|\vec{\mathbf{v}}_1\|$. Możemy więc przyjąć, że $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}_1$. Analogicznie $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_2$. To oczywiście nie jedyny wybór, ale mieliśmy tylko wskazać jedną parę wektorów $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$! Niech $\vec{\mathbf{w}}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + t\sqrt{3} \end{pmatrix}$, gdy $-1 \le t \le 1$. Oczywiście $\vec{\mathbf{w}}_{-1} = \vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{w}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$. Jeśli $f(t) = \frac{\|A\vec{\mathbf{w}}_t\|}{\|\vec{\mathbf{w}}_t\|}$, to $f(-1) < 1 < f(1)$, a ponieważ funkcja f jest ciągła, więc istnieje taka liczba $\tau \in (-1,1)$, że $f(\tau) = 1$. Przyjmujemy $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}}_\tau$ i stwierdzamy bez trudu, że zachodzi równość $\|A\vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\|$.

Komentarz: Niektóre wektory $\vec{\mathbf{y}}$ są skracane przez przekształcenie $\vec{\mathbf{y}} \longrightarrow A\vec{\mathbf{y}}$, np. wektor $\vec{\mathbf{v}}_1$, inne są wydłużane, np. wektor $\vec{\mathbf{v}}_2$, więc nie ma w tym nic dziwnego, że „po drodze" od wektora $\vec{\mathbf{v}}_1$ do wektora $\vec{\mathbf{v}}_2$ natrafiamy na taki, którego długość nie zmienia się. Jasne jest, że w tym rozumowaniu w ogóle nie zwracamy uwagi na kierunek, bo pytano nas jedyne o długość. Z równości $\|A\vec{\mathbf{v}}\|$ oczywiście **nie** wynika równość $A\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$.

Dodajmy jeszcze, że można było postąpić inaczej. Równość $\|A\binom{x}{y}\| = \|\binom{x}{y}\|$ jest równoważna temu, że $\|A\binom{x}{y}\|^2 = \|\binom{x}{y}\|^2$, czyli równości

$$(-2x+5y)^2 + (-5x+13y)^2 = x^2 + y^2\,,$$

więc równości $28x^2 - 150xy + 193y^2 = 0$. Ponieważ $\Delta = (150y)^2 - 4\cdot 28\cdot 193y^2 = 884y^2$, więc dla każdego $y \neq 0$ istnieje taka liczba $x \neq 0$, że $28x^2 - 150xy + 193y^2 = 0$, a to oznacza, że $\|A\binom{x}{y}\| = \|\binom{x}{y}\|$. Można też ustalić x i szukać y. Jeśli np. $x = 2$, to y ma spełniać równanie $28\cdot 4 - 2\cdot 150\cdot y + 193y^2 = 0$, co prowadzi do wniosku, że $y = \frac{1}{193}(150 \pm \sqrt{221}\,)$. Dodajmy jeszcze, że $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{193}(150 \pm \sqrt{221}\,) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{193}(-22 \pm 5\sqrt{221}\,) \\ \frac{1}{193}(20 \pm 13\sqrt{221}\,) \end{pmatrix}$, więc wektor $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{193}(150 \pm \sqrt{221}\,) \end{pmatrix}$ **NIE** jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 1 (zresztą liczba 1 wartością własną nie jest). ■

---

2. (10 pt.) Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ -3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^3.

Znaleźć macierz A^3.

Rozwiązanie Będziemy szukać wartości własnych, które to liczby są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego, więc będziemy starać się rozłożyć ten wielomian na czynniki, więc wymnażanie jest ostatnią rzeczą, za którą należy się brać.

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda & 0 \\ -3 & \sqrt{3} & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{trzecia}}{\underset{\text{kolumna}}{=\!=\!=}} 0\cdot\Big|\quad\Big| - 0\cdot\Big|\quad\Big| + (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\big((-1-\lambda)^2 + \sqrt{3}^2\big) = (2-\lambda)\big((1+\lambda)^2 - i^2\sqrt{3}^{\,2}\big) = (2-\lambda)(1+\lambda-i\sqrt{3}\,)(1+\lambda+i\sqrt{3}\,)\,,$$

zatem $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}$ oraz $\lambda_3 = -1 + i\sqrt{3}$.

Znajdziemy wektory własne odpowiadające λ_1. Jeśli $\vec{\mathbf{v}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, to musi być spełniony układ równań $\begin{cases} -3x + y\sqrt{3} + 0z = 0 \\ -x\sqrt{3} - 3y + 0z = 0 \\ -3x + y\sqrt{3} + 0z = 0 \end{cases}$. Dzieląc pierwsze równanie przez $-\sqrt{3}$ i dodając wynik do drugiego otrzymujemy $-4y = 0$, więc $y = 0$. Wobec tego również $x = 0$ (z pierwszego równania). Wykazaliśmy, że wektory własne odpowiadające λ_1 to wektory postaci $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)$, $z \neq 0$, np. $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. W zasadzie te rachunki są zbędne, bo każdy, kto rzeczywiście potrafi mnożyć macierze, widzi to od razu: mnożenie macierzy przez wektor postaci $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)$ to mnożenie jej trzeciej kolumny przez liczbę z, więc wynik to $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

Teraz zajmiemy się λ_2. Jeśli $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, to musi być spełniony układ równań

$$\begin{cases} \quad ix\sqrt{3} + y\sqrt{3} + 0z = 0 \\ -\ x\sqrt{3} + iy\sqrt{3} + 0z = 0 \\ -3x \qquad + y\sqrt{3} + (3 + i\sqrt{3}\,)z = 0 \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez liczbę i otrzymujemy drugie, więc te dwa są równoważne. Pierwsze można zapisać w postaci $y = -ix$. Wtedy trzecie przybiera postać

$$-(3 + i\sqrt{3}\,)x + (3 + i\sqrt{3}\,)z = 0\,,$$

czyli $z = x$. Przyjmując $x = 1$ otrzymujemy wektor $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ponieważ macierz jest rzeczywista i $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, więc jednym z wektorów własnych odpowiadających λ_3 jest wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Z równości $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$ wynika od razu, że $A^{-1}\vec{\mathbf{v}} = \lambda^{-1}\vec{\mathbf{v}}$, zatem wartościami własnymi macierzy A^{-1} są liczby $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3}\,)$ oraz $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{3}\,)$ a odpowiadają te same wektory własne, co w przypadku macierzy A, czyli kolejno $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ i wreszcie $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jeśli $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, to $A^3\vec{\mathbf{v}} = \lambda^3\vec{\mathbf{v}}$, zatem wartościami własnymi macierzy A^3 są liczby $\lambda_1^3 = {=}2^3 = 8$, $\lambda_2^3 = (-1 - i\sqrt{3}\,)^3 = 8$ i $\lambda_2^3 = (-1 + i\sqrt{3}\,)^3 = 8$, a odpowiadającymi im wektorami są kolejno: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

BARDZO WAŻNE STWIERDZENIE

Jeśli $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, to dla każdej liczby c zachodzi równość $A(c\vec{\mathbf{v}}) = \lambda(c\vec{\mathbf{v}})$.

Jeśli $A\vec{\mathbf{v}}_1 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_1$ i $A\vec{\mathbf{v}}_2 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_2$, to zachodzi równość $A(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2) = \lambda(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2)$. ■

Z tego stwierdzenia wynika, że zbiór wektorów własnych, który zawiera wektor $\vec{\mathbf{v}}$, zawiera też całą prostą przechodzącą przez punkt $\mathbf{0}$ wyznaczoną przez $\vec{\mathbf{v}}$. Jeśli zawiera dwa nierównoległe wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$, to zawiera wszystkie wektory postaci $c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2$, gdzie c_1, c_2 są dowolnymi liczbami, a to oznacza, że zawiera płaszczyznę przechodzącą przez $\mathbf{0}$ równoległą do obu wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$. Jeśli zawiera trzy wektory nie leżące w jednej płaszczyźnie, to zawiera całą trójwymiarową przestrzeń.

Z tego, co napisałem, wynika, że zbiór wektorów własnych macierzy A^3 zawiera wszystkie wektory postaci $c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, czyli wszystkie wektory $\vec{\mathbf{r}}$ postaci $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Oznacza to, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{r}}$ mamy $A^3\vec{\mathbf{r}} = 8\vec{\mathbf{r}}$. W szczególności $A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $A^3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Oznacza to, że $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Uwaga Pomnożenie macierzy A przez siebie, a potem otrzymanego wyniku przez A nie jest błędem, ale jest stratą czasu i jasnym komunikatem dla sprawdzającego, że student ciągle jeszcze nie wie, co to jest wektor własny, choć jest w stanie poprawnie różne rzeczy obliczyć. Apeluję o mniej „maszynowe” podejście do nauki matematyki (i zapewne innych przedmiotów).

3. (10 pt.) Niech $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^2.

Znaleźć macierz A^2.

Znaleźć wszystkie takie wektory $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$.

Rozwiązanie Jasne jest, że jeśli liczba λ jest wartością własną macierzy A, to liczba 9λ jest wartością własną macierzy $9A$. Wektory własne macierzy A i macierzy $9A$ to te same wektory. Zajmiemy się więc macierzą $9A$, bo choć radzimy sobie z ułamkami nienajgorzej, to jednak preferujemy liczby całkowite.* Zaczynamy oczywiście od wartości własnych.

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & -4 \\ 8 & 1-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 8 & 1-\lambda \\ -4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9) - 64(7-\lambda+2) - 16(8+1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-9) - 80(9-\lambda) =$$
$$=(\lambda-9)\big((1-\lambda)(1+\lambda) - 80\big) = (\lambda-9)(81-\lambda^2) = -(\lambda-9)^2(\lambda+9).$$ Wynika stąd, że wartościami własnymi macierzy $9A$ są liczby $\lambda_1 = 9 = \lambda_2$ i $\lambda_3 = -9$. Jeśli $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 9, to spełniony jest układ równań: $\begin{cases} -8x + 8y - 4z = 0 \\ 8x - 8y + 4z = 0 \\ -4x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$. Układ ten jest równoważny temu, że $2x - 2y + z = 0$. Oznacza to, że wektory własne odpowiadające wartości własnej 9 tworzą płaszczyznę o podanym przed chwilą równaniu. $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej -9 wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} 10x + 8y - 4z = 0 \\ 8x + 10y + 4z = 0 \\ -4x + 4y + 16z = 0 \end{cases}$. Dodając dwa pierwsze równania, potem dzieląc przez 18, otrzymujemy $x + y = 0$. Stąd i z pierwszego równania wynika, że $2x - 4z = 0$, czyli $x = 2z$. Wynika stąd, że wektory własne odpowiadające -9 są postaci $\left(\begin{smallmatrix} 2z \\ -2z \\ z \end{smallmatrix}\right) = z\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Jak widać są one prostopadłe do płaszczyzny złożonej z wektorów własnych odpowiadających liczbie 9.

Zajmijmy się teraz macierzą A. Jej wartościami własnymi są liczby 1, 1 i -1. Wektory własne odpowiadające wartości własnej 1 to wszystkie wektory w płaszczyźnie $2x - 2y + z = 0$, czyli prostopadłe do wektora $[2,-2,1]$. Wobec tego, jeśli $2x - 2y + z = 0$, to $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, natomiast $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Oznacza to, że wektory $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ i $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ są symetryczne względem płaszczyzny $2x - 2y + z = 0$. Wartościami własnymi macierzy A^2 są liczby 1^2, 1^2 i $(-1)^2$, więc liczby 1, 1 i 1. Odpowiadają im wektory własne, np. $[1,1,0]$, $[1,-1,-4]$ i $[2,-2,1]$, wzajemnie prostopadłe, więc nie leżące w jednej płaszczyźnie. Wobec tego każdy wektor jest wektorem własnym odpowiadającym jedynce, a to oznacza, że $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

* A co na to klasyk? – Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. = Good God made the integers, all else is the work of man. – Leopold Kronecker, 1823 – 1891

Tak jak w poprzednim zadaniu, a nawet prościej, można doliczyć się, że tak jest mnożąc macierz A przez siebie i ryzykując pomyłki w obliczeniach. $\blacksquare$

---

4. (10 pt.) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = -6x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = \quad 8x(t) + 5y(t). \end{cases}$

Rozwiązanie Zajmiemy się najpierw macierzą $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Wartości własne są pierwiastkami równania $0 = \begin{vmatrix} -6-\lambda & -3 \\ 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(5-\lambda) + 3\cdot 8 = \lambda^2+\lambda-6 = (\lambda-2)(\lambda+3)$. Wartościami własnymi są więc liczby $\lambda_1 = -3$ oraz $\lambda_2 = 2$. Współrzędne x, y wektora własnego odpowiadającego $\lambda_1 = -3$ spełniają układ równań $\begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ \;\; 8x + 8y = 0 \end{cases}$, czyli równanie $x + y = 0$. Współrzędne wektora własnego odpowiadającego wartości własnej $\lambda_2 = 2$ spełniają układ równań $\begin{cases} -8x - 3y = 0 \\ \;\; 8x + 3y = 0 \end{cases}$, czyli równanie $8x + 3y = 0$. Rozwiązanie ogóle układu równań ma więc postać

$$c_1\tbinom{1}{-1}e^{-3t} + c_2\tbinom{-3}{8}e^{2t},$$

tzn. $x(t) = c_1e^{3t} - 3c_2e^{2t}$, $y(t) = -c_1e^{-3t} + 8c_2e^{2t}$. $\blacksquare$

---

5. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x'(t) = -14x(t) + 25y(t), \\ y'(t) = \;\; -9x(t) + 16y(t), \end{cases}$

które spełnia warunek $x(0) = -2$, $y(0) = -1$.

Rozwiązanie Zaczniemy od znalezienia wartości własnych odpowiedniej macierzy:
$0 = \begin{vmatrix} -14-\lambda & 25 \\ -9 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (-14-\lambda)(16-\lambda) + 9\cdot 25 = \lambda^2 - 2\lambda - 14\cdot 16 + 3^2\cdot 5^2 =$
$= \lambda^2 - 2\lambda - (15-1)(15+1) + 15^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$, zatem $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$. Współrzędne x, y wektora własnego odpowiadającego $\lambda_1 = 1$ spełniają układ równań $\begin{cases} -15x + 25y = 0 \\ -\;\, 9x + 15y = 0 \end{cases}$, czyli równanie $-3x + 5y = 0$. Mamy więc tylko jeden kierunek własny. Znajdziemy wobec tego uogólniony wektor własny odpowiadający wektorowi $\binom{5}{3}$, czyli rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -15x + 25y = 5 \\ -\;\, 9x + 15y = 3 \end{cases}$. Jest on równoważny jednemu równaniu $-3x + 5y = 1$, które ma oczywiście nieskończenie wiele rozwiązań, np. $x = -2$, $y = -1$. Rozwiązanie ogólne układu wygląda tak

$$c_1\tbinom{5}{3}e^t + c_2\left[\tbinom{-2(\vec{\mathbf{v}}_1+t\vec{\mathbf{v}}_2+t^2\vec{\mathbf{v}}_3)e^{\lambda t}}{-1} + t\tbinom{5}{3}\right]e^t,$$

czyli $x(t) = 5c_1e^t + c_2[-2+5t]e^t$, $y(t) = 3c_1e^t + c_2[-1+3t]e^t$. Mamy znaleźć rozwiązanie spełniające warunek początkowy $-2 = x(0) = 5c_1 - 2c_2$, $-1 = y(0) = 3c_1 - c_2$. Mnożąc drugie równanie przez 2, następnie odejmując wynik od pierwszego równania otrzymujemy $0 = -c_1$. Stąd natychmiast wynika, że $c_2 = 1$. Wobec tego $x(t) = [-2+5t]e^t$, $y(t) = [-1+3t]e^t$.

Dlaczego tak rozwiązujemy układy równań różniczkowych?

Rozwiązaniem równania drugiego rzędu o stałych współczynnikach okazały się funkcje, które były iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej — quasiwielomiany. W przypadku układu $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ można mieć nadzieję na podobny rezultat. Szukamy więc rozwiązania w postaci $(\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + t^2\vec{\mathbf{v}}_3)e^{\lambda t}$ — stopień jest dwa lub mniejszy, ale mógłby być większy, nie chcę komplikować oznaczeń. Wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{v}}_3$ to po prostu jakieś wektory o tej samej liczbie współrzędnych co wektor $\mathbf{x}(t)$. Podstawiamy hipotetyczne rozwiązanie do równania $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ i otrzymujemy:

$$(\vec{\mathbf{v}}_2 + 2t\vec{\mathbf{v}}_3)e^{\lambda t} + \lambda(\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + t^2\vec{\mathbf{v}}_3)e^{\lambda t} = A(\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + t^2\vec{\mathbf{v}}_3)e^{\lambda t}).$$

Po uporządkowaniu według potęg t i podzieleniu obu stron przez $e^{\lambda t}$ wygląda to tak:

$$(\vec{\mathbf{v}}_2 + \lambda\vec{\mathbf{v}}_1) + t(2\vec{\mathbf{v}}_3 + \lambda\vec{\mathbf{v}}_2) + t^2\lambda\vec{\mathbf{v}}_3 = A\vec{\mathbf{v}}_1 + tA\vec{\mathbf{v}}_2 + t^2A\vec{\mathbf{v}}_3\,.$$

Wystarczyłoby więc (a można wykazać, że tak musi być), by

$$A\vec{\mathbf{v}}_1 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2\,, \qquad A\vec{\mathbf{v}}_2 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_2 + 2\vec{\mathbf{v}}_3 \quad \text{i} \quad A\vec{\mathbf{v}}_3 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_3\,.$$

Np. jeśli $\vec{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{0}$ i $\vec{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{0}$, to $\vec{\mathbf{v}}_1$ jest wektorem własnym macierzy A, który odpowiada wartości własnej λ — nie zakładaliśmy wcześniej, że λ to wartość własna macierzy A, właśnie okazało się, że musi nią być! Jeśli $\vec{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{0} \neq \vec{\mathbf{v}}_2$, to $\vec{\mathbf{v}}_2$ jest wektorem wąsnym odpowiadającym wartości własnej λ, a $\vec{\mathbf{v}}_1$ jest uogólnionym wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej. Wreszcie jeśli $\vec{\mathbf{v}}_3 \neq \mathbf{0}$, to $\vec{\mathbf{v}}_3$ jest wektorem własnym, $\vec{\mathbf{v}}_2$ — uogólnionym wektorem własnym, a $\vec{\mathbf{v}}_1$ też nazywamy uogólnionym wektorem własnym dodając czasem *drugiego rzędu.* Można wykazać, że jeśli nie starcza wektorów własnych do napisania rozwiązania ogólnego, to można znaleźć uogólnione wektory własne i podać rozwiązanie w postaci (wektorowego) quasiwielomianu.