Matematyka A, kolokwium, 26 maja 2010, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b istnieją takie liczby całkowite x, y, że

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Znaleźć wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$.

Czy istnieje taki niezerowy wektor $\vec{\mathbf{v}}$, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$?

---

2. (10 pt.) Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^4.

Znaleźć macierz A^8.

---

3. (10 pt.) Niech $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(3.1) Znaleźć macierz A taką, że $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{18}(\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}$.

(3.2) Znaleźć $A\vec{\mathbf{w}}$.

(3.3) Sprawdzić, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, to również wektor $A\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$.

(3.4) Sprawdzić, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ zachodzi równość $\|A\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|$.

(3.5) Niech $\vec{\mathbf{x}}$ oznacza wektor prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{x}}$ i $A\vec{\mathbf{x}}$.

(3.6) Sprawdzić, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to $|\lambda| = 1$.

---

4. (10 pt.) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = 6x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 8x(t) - 5y(t). \end{cases}$

---

5. (10 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x'(t) = -13x(t) + 25y(t), \\ y'(t) = \ \ -9x(t) + 17y(t), \end{cases}$

które spełnia warunek $x(0) = -2$, $y(0) = -1$.