Egzamin poprawkowy z matematyki dla studentów chemii, 18 lutego 2010, 10:05 – 13:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek! Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały pojawiły się na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_a c$ pamiętając o założeniach o a i c.

Rozwiązać równanie $\log_3(x^2+2)+\log_3(2x-1)=2+\log_3 x$.

---

2. Podać definicję tangensa dowolnego kąta, którego tangens można zdefiniować.

Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}(7t)+\operatorname{tg}(3t)=0$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. Niech $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$, więc $f'(x)=-\frac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$, $f''(x)=-\frac{2\cos x+2\cos^2 x+\sin^2 x}{4\sqrt{1+\cos x}^3}$ dla tych x, dla których $\cos x\neq -1$.

Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje i te, na których rośnie.

Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice jednostronne pochodnej f' funkcji f przy $x\longrightarrow\pi$.

Obliczyć granice jednostronne drugiej pochodnej f'' funkcji f przy $x\longrightarrow\pi$.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Niech $\mathbf{A}=(1,1,2)$, $\mathbf{B}=(9,1,1)$, $\mathbf{C}=(1,3,1)$, $\mathbf{O}=(0,0,0)$.

Znaleźć objętość czworościanu $\mathbf{OABC}$.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}}\neq\vec{\mathbf{0}}=\overrightarrow{[0,0,0]}$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć równanie płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć kosinusy obu kątów utworzonych przez płaszczyznę $\mathbf{ABC}$ i płaszczyznę o równaniu $x+y+z=1$.

---

5. Niech $f(x)=xe^x$, $g(x)=x^3e^x$. Wykresy funkcji f i g dzielą płaszczyznę na kilka części. Dwie z nich są ograniczone. Znaleźć sumę ich pól.

---

6. Przypomnienie: dowolnego x, to $\operatorname{arctg} x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ jest taką liczbą, że $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$. Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji arctg w punkcie $x_0=0$.

Wykazać, że jeśli $T_3(x)$ oznacza wartość trzeciego wielomianu funkcji arctg w punkcie 0 oraz $0<x<1$, to spełniona jest nierówność $T_3(x)<\operatorname{arctg} x<T_3(x)+\frac{x^5}{5}$.

Korzystając z uzyskanej nierówności wykazać, że $\frac{8}{9\sqrt{3}}<\frac{\pi}{6}<\frac{8}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{45\sqrt{3}}$.

Informacje pożyteczne lub zbędne: $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$, $11^2=121$, $12^2=144$, $13^2=169$, $14^2=196$, $15^2=225$, $16^2=256$, $17^2=289$, $18^2=324$, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 0=0$, $3{,}99999999999<2\cdot 2<4{,}0000000000001$.