Egzamin z matematyki dla studentów chemii, 3 lutego 2010, 10:05 – 13:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek! Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały pojawiły się na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_c a$ pamiętając o założeniach o a i c.

Rozwiązać równanie $\log_{10}(x^2-3x+2)=1-\log_{10}(x+2)$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta.

Rozwiązać nierówność $\cos^2 t > \cos^2(t+\frac{\pi}{3})$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. Niech $f(x)=\sqrt[3]{2x-\frac{1}{x}}$, więc $f'(x)=\frac{2x^2+1}{3\sqrt[3]{x^4(2x^2-1)^2}}$, $f''(x)=-\frac{4(2x^4+5x^2-1)}{9\sqrt[3]{x^7(2x^2-1)^5}}$, gdy $\frac{1}{2}\neq x^2\neq 0$.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice jednostronne funkcji f przy $x\longrightarrow 0$.

Obliczyć granice jednostronne f' przy $x\longrightarrow\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ i przy $x\longrightarrow 0$.

Znaleźć asymptoty funkcji f.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 7\end{vmatrix}$.

Niech $A=(1,2,3)$, $B=(-1,3,1)$, $C=(13,5,-1)$.

Obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AC}$.

Znaleźć iloczyn wektorowy i skalarny wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ oraz kosinus i sinus kąta między tymi wektorami.

Znaleźć pole trójkąta ABC.

---

5. Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji $-\ln(1-x)$ w punkcie $x_0=0$.

Wykazać, że jeśli $0<x<1$, to $T_3(x)<-\ln(1-x)<T_3(x)+\frac{x^4}{4(1-x)}$, gdzie $T_3(x)$ oznacza wartość trzeciego wielomianu funkcji $-\ln(1-x)$ w punkcie 0.

Korzystając z uzyskanej nierówności wskazać taką liczbę wymierną w, że $w<\ln 2<w+\frac{1}{32}$.

---

6. Znaleźć objętość obszaru złożonego z tych punktów (x,y,z), dla których spełnione są nierówności $|z|\leq\frac{1}{2}$ i $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

Informacje pożyteczne lub zbędne: $5^3=125$, $3^4=81$, $4^3=64$, $81^2=6561$, $5^7=78125$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^{16}=65536$, $2^{17}=131072$, $19^3=6859$, $19^4=130321$, $19^5=2476099$,

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$, $\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.