Matematyka A, kolokwium, 2 grudnia 2008, 18:15 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Wykazać, że niezależnie od wyboru liczb $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja f zdefiniowana wzorem $f(x) = x^2e^{3x} + (a + bx)e^{2x}$ spełnia równanie

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{3x}\,.$$

---

2. (10 pt.) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji $\sqrt{x}$ w punkcie $p = 49$.

---

3. (10 pt.) Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

---

4. (10 pt.) Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 12x}$. Wiadomo, że $f'(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x^3-12x}}$ i $f''(x) = \frac{4(x^4-14x^2-16)}{3(\sqrt[3]{x^3-12x})^3}$.

Pierwiastkami wielomianu $x^4 - 14x^2 - 16$ są dwie liczby rzeczywiste $\pm\sqrt{7 + \sqrt{57}} \approx \pm 3{,}81$, innych pierwiastków rzeczywistych ten wielomian nie ma.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca, na których jest ściśle wypukła, na których jest ściśle wklęsła.

Znaleźć asymptoty funkcji f.

Znaleźć $\lim\limits_{x\to 2} f'(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to -2} f'(x)$.

Korzystając z uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. (10 pt.) Z każdego z czterech rogów tekturowego prostokąta o bokach 15 cm i 7 cm wycięto kwadrat o boku x. Otrzymano dwunastokąt, którego osiem boków ma długość x i którego każde dwa kolejne boki są prostopadłe. Zagięto tekturę w wyniku czego powstało pudełko (bez pokrywki) w kształcie prostopadłościanu. Wysokość pudełka równa jest x. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka jest największa?
