

Matematyka A, kolokwium, 2 grudnia 2008, 18:15 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (10 pt.) Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\ln(\operatorname{ctg}(x^2))$, b. (4 pt.) $\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$ c. (3 pt.) $\frac{e^{3x}+5}{e^x+1}$.

2. (10 pt.) Znaleźć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = x^x$ w punkcie (x_0, y_0) , jeśli $x_0 = \frac{1}{3}$.

Znaleźć punkty wspólne tej stycznej z osiami OX i OY .

3. (10 pt.) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ spełnione są nierówności

$$2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} > 3 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} x + 2 \sin x > 3x .$$

4. (10 pt.) Niech $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$. Wiadomo, że $f'(x) = \frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}$ i $f''(x) = \frac{3(x^4-6x^2-3)}{4(\sqrt{x^3-3x})^3}$.

Pierwiastkami wielomianu $x^4 - 6x^2 - 3$ są dwie liczby rzeczywiste $\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}} \approx \pm 2,54$, innych pierwiastków rzeczywistych ten wielomian nie ma.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca, na których jest ściśle wypukła, na których jest ściśle wklęsła.

Korzystając z uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f .

5. (10 pt.) Na paraboli $y = \frac{1}{6}x^2$ znaleźć punkt, który leży najbliżej punktu $(\frac{1}{3}, \frac{25}{6})$
