**Matematyka A, kolokwium, 23 kwietnia 2009, rozwiązania**

*Poprawione 5 maja.*

*Po sugestiach niektórych osób studiujacych na pierwszym roku chemii postanowiłem napisać rozwiązania zadań z drugiego kolokwium. Mam nadzieje, ze nie wielu pomyłek. Wyobrażam sobie, że kilka osób przeczyta te rozwiązania i być może dzięki tej lekturze lepiej zrozumie, o czym ostatnio mówimy.*

**1. (10 pt.)** Obliczyć całkę $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x \ln(\sin x)\,dx$.

*Rozwiązanie.*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x \ln(\sin x)\,dx \xlongequal[dy=\cos x\,dx]{y=\sin x} \int_0^1 y^3(1-y^2)\ln y\,dy =$$

$$= \Big( (\tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^6}{6})\ln y - \int (\tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^6}{6})\tfrac{1}{y}\,dy \Big)\Big|_0^1 = \Big( (\tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^6}{6})\ln y - \int (\tfrac{y^3}{4} - \tfrac{y^5}{6})\,dy \Big)\Big|_0^1 =$$

$$= \Big( (\tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^6}{6})\ln y - (\tfrac{y^4}{16} - \tfrac{y^6}{36})\Big|_0^1 = -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{36} = \tfrac{-5}{144},$$

bowiem $\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\ln y}{1/y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{1/y}{-1/y^2} = \lim\limits_{y\to 0^+}(-y) = 0$ — zastosowaliśmy regułę de l'Hospitala. Trzeba było obliczyć granicę, bo $\lim\limits_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.

---

**2. (10 pt.)** Znaleźć wartości własne (również nierzeczywiste) i wektory własne im odpowiadające macierzy $A$, macierzy $A^2$ i macierzy $A^{-1}$, jeśli $A = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$.

*Rozwiązanie.*

Liczba $\lambda$ jest wartością własną tej macierzy wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem równania charakterystycznego:

$$0 = \begin{vmatrix} -9-\lambda & 13 \\ -7 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (-9-\lambda)(10-\lambda) - 13\cdot(-7) = \lambda^2 - \lambda + 1,$$

zatem, gdy $\lambda = \frac12(1+i\sqrt3)$ albo $\lambda = \frac12(1-i\sqrt3)$. Wektor $\binom{x}{y}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda = \frac12(1+i\sqrt3)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9x+13y \\ -7x+10y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix},$$

czyli gdy $-9x+13y = \frac12(1+i\sqrt3)x$ i $-7x+10y = \frac12(1+i\sqrt3)y$. Ponieważ $\frac12(1+i\sqrt3)$ jest wartością własną, więc te równania są równoważne, zatem wektor $\binom{x}{y}$ jest wektorem własnym wtedy i tylko wtedy, gdy $13y = \frac12(19+i\sqrt3)x$ tzn., gdy $y = \frac{1}{26}(19+i\sqrt3)x$, np. wektorem własnym odpowiadającym $\lambda = \frac12(1+i\sqrt3)$ jest wektor $\binom{26}{19+i\sqrt3}$. Ogólnie dla dowolnej liczby zespolonej $t \neq 0$ wektor $\begin{pmatrix} 26t \\ (19+i\sqrt3)t \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\frac12(1+i\sqrt3)$.

Druga wartość własna, to $\frac12(1-i\sqrt3) = \overline{\frac12(1+i\sqrt3)}$, a ponieważ macierz jest **rzeczywista**, więc odpowiada jest wektor własny $\binom{\overline{26}}{\overline{19+i\sqrt3}} = \binom{26}{19-i\sqrt3}$ oraz każdy inny otrzymany przez pomnożenie tego wektora przez jakąś liczbę zespoloną.

Załóżmy teraz, że $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dla pewnego wektora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Wtedy $A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Oznacza to, że jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy $A$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda$, to $\mathbf{v}$ jest też wektorem własnym macierzy $A^2$, ale tym razem odpowiada on wartości własnej $\lambda^2$. Wobec tego wartościami własnymi macierzy $A^2$ są liczby $\left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2i\sqrt{3}-3) = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ oraz $\left(\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2i\sqrt{3}-3) = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$. Odpowiadają im wektory własne $\binom{26}{19+i\sqrt{3}}$ i $\binom{26}{19-i\sqrt{3}}$.

Jeśli wyznacznik macierzy jest różny od $0$, to — jak wiadomo — macierz ma odwrotną. Jest tak w naszym przypadku, bo wyznacznik macierzy $A$ jest równy $1$. Iloczyn wszystkich wartości własnych macierzy jest równy jej wyznacznikowi. Jeśli $A=\lambda\mathbf{v}$, to $A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$, zatem $A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$. Oznacza to, że jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy $A$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda$, to $\mathbf{v}$ jest też wektorem własnym macierzy $A^{-1}$, ale tym razem odpowiada on wartości własnej $\lambda^{-1}=\frac{1}{\lambda}$. Wobec tego wartościami własnymi macierzy $A^{-1}$ są liczby $\left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)^{-1} = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ oraz $\left(\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right)^{-1} = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Odpowiadają im wektory własne $\binom{26}{19+i\sqrt{3}}$ i $\binom{26}{19-i\sqrt{3}}$.

---

**3.** Niech $A = \frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix} -26 & 4-24\sqrt{3} & 8+12\sqrt{3} \\ 4+24\sqrt{3} & -11 & 32-3\sqrt{3} \\ 8-12\sqrt{3} & 32+3\sqrt{3} & 37 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$,

$V_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**(1 pt.)** Obliczyć $A\cdot V_1$ oraz iloczyny skalarne wektorów $V_1$ i $V_2$, $V_1$ i $V_3$, $V_2$ i $V_3$ .

**(4 pt.)** Znaleźć takie liczby $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, że $A\cdot V_2 = \alpha V_2 + \beta V_3$ i $A\cdot V_3 = \gamma V_2 + \delta V_3$.

**(5 pt.)** Znaleźć **rzeczywiste** wartości własne i wektory własne macierzy $A$.

*Rozwiązanie.*

Mamy $A\cdot V_1 = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 1\cdot(-26)+4\cdot(4-24\sqrt{3})+8\cdot(8+12\sqrt{3}) \\ 1\cdot(4+24\sqrt{3})+4\cdot(-11)+8\cdot(32-3\sqrt{3}) \\ 1\cdot(8-12\sqrt{3})+4\cdot(32+3\sqrt{3})+8\cdot 37 \end{pmatrix} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 54 \\ 216 \\ 432 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} =$
$V_1$. $V_1\cdot V_2 = -4+44-40=0$, $V_1\cdot V_3 = 12+12-24=0$, $V_2\cdot V_3 = -48+33+15=0$.

$$AV_2 = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} (-4)\cdot(-26)+11\cdot(4-24\sqrt{3})+(-5)\cdot(8+12\sqrt{3}) \\ (-4)\cdot(4+24\sqrt{3})+11\cdot(-11)+(-5)\cdot(32-3\sqrt{3}) \\ (-4)\cdot(8-12\sqrt{3})+11\cdot(32+3\sqrt{3})+(-5)\cdot 37 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 108-324\sqrt{3} \\ -297-81\sqrt{3} \\ 135+81\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6\sqrt{3} \\ -\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}V_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}V_3,$$

zatem $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$AV_3 = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12\cdot(-26)+3\cdot(4-24\sqrt{3})+(-3)\cdot(8+12\sqrt{3}) \\ 12\cdot(4+24\sqrt{3})+3\cdot(-11)+(-3)\cdot(32-3\sqrt{3}) \\ 12\cdot(8-12\sqrt{3})+3\cdot(32+3\sqrt{3})+(-3)\cdot 37 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{54}\begin{pmatrix} -324-108\sqrt{3} \\ -81+297\sqrt{3} \\ 81-135\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2\sqrt{3} \\ -\frac{3}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}V_2 - \frac{1}{2}V_3,$$

zatem $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\delta = -\frac{1}{2}$.

Z wzoru $A\cdot V_1 = V_1$ i z definicji wartości własnej wynika, że $V_1$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $1$. Wektory $V_1, V_2, V_3$ są wzajemnie prostopadłe. Niech $V$ będzie dowolnym wektorem. Istnieją takie liczby $a,b,c$, że

$$V = aV_1 + bV_2 + cV_3,$$

przy czym wektor $V$ wyznacza liczby $a, b, c$ jednoznacznie. Wobec tego

$$AV = aAV_1 + bAV_2 + cAV_3 = aV + b(\alpha V_2 + \beta V_3) + c(\gamma V_2 + \delta V_3) =$$
$$= aV + (b\alpha + c\gamma)V_2 + (b\beta + c\delta)V_3\,.$$

Jeśli $V$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda$, to musi zachodzić równość

$$\lambda aV_1 + \lambda bV_2 + \lambda cV_3 = \lambda V = AV = aV + b(\alpha V_2 + \beta V_3) + c(\gamma V_2 + \delta V_3) =$$
$$= aV + (b\alpha + c\gamma)V_2 + (b\beta + c\delta)V_3\,,$$

zatem, ponieważ wektory $V_1$, $V_2$, $V_3$ są wzajemnie prostopadłe, zachodzić muszą równości $\lambda a = a$, $\lambda b = b\alpha + c\gamma$, $\lambda c = b\beta + c\delta$. Ten układ równań z niewiadomymi $a, b, c$ i parametrem $\lambda$ można przepisać w postaci $(1-\lambda)a = 0$, $(\alpha-\lambda)b + \gamma c = 0$, $\beta b + (\delta-\lambda)c = 0$.

Wyznacznik tego układu równań to: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \gamma \\ 0 & \beta & \delta-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \gamma \\ \beta & \delta-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda)\big((\alpha-\lambda)(\delta-\lambda) - \gamma\beta\big) = (1-\lambda)\big(\lambda^2 - \lambda(\alpha+\delta) + \alpha\delta - \gamma\beta\big) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+1)\,.$$

Jasne jest, że jeśli $\lambda$ jest liczbą **rzeczywistą**, to $\lambda^2 + \lambda + 1 > 0$, zatem jedynym rzeczywistym parametrem $\lambda$, dla którego układ równań ma niezerowe rozwiązanie jest $\lambda = 1$ — ma on niezależnie od wartości $\lambda$ zerowe rozwiązanie, ale nas interesują rozwiązania niezerowe. Wtedy jednak muszą zachodzić równości $b = 0 = c$, a więc jedynymi rzeczywistymi wektorami własnymi tej macierzy są wektory postaci $aV_1$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

*Komentarz: Można oczywiście znaleźć wielomian charakterystyczny, a potem jego pierwiastki. Okaże się, że jest on równy* $(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+1)$. *Wynika to stąd, że jeśli* $A$ *jest dowolną macierzą kwadratową, a* $D$ *dowolną macierzą tego samego wymiaru o wyznaczniku różnym od zera, to wielomiany charakterystyczne macierzy* $A$ *i* $D^{-1}AD$ *są równe. Matematycy zwykli mówić, że macierze* $A$ *i* $D^{-1}AD$ *są podobne. W naszym przypadku* $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 \\ 4 & 11 & 3 \\ 8 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ *(jej kolejne kolumny to wektory* $V_1$, $V_2$, $V_3$*) i siłą rzeczy* $D^{-1} = \frac{1}{162}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 16 \\ -4 & 11 & -5 \\ 12 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ *i jeśli przyjrzeć się uważnie obliczeniom zaprezentowanym wyżej, to można zauważyć, że zachodzi równość* $D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, *ale oczywiście tekst komentarza nie jest częścią rozwiązania.*

*Dodajmy jeszcze, że jeśli* $V \cdot V_1 = 0$, *czyli jeśli wektor* $V$ *jest prostopadły do wektora* $V_1$, *to również* $AV \cdot V_1 = 0$ *oraz* $\|AV\| = \|V\|$ *i* $AV \cdot V = -\frac{1}{2}\|V\|^2 = \|V\| \cdot \|AV\| \cdot \cos\frac{2\pi}{3}$. *Wynika stąd, że wektory* $AV$ *i* $V$ *tworzą kąt* $\frac{2\pi}{3}$. *Stąd wynika, że macierz* $A$ *to macierz obrotu wokół prostej* $\ell$, *która przechodzi przez początek układu współrzędnych i jest równoległa do wektora* $V_1$. *Z tej geometrycznej interpretacji wynika od razu, że jedyna prosta przechodząca przez* $\mathbf{0}$, *która jest przekształcana na siebie za pomocą odwzorowania, które przeprowadza punkt* $V \in \mathbb{R}^3$ *na punkt* $A \cdot V$, *to prosta* $\ell$, *czyli oś tego obrotu.*

**4. (10 pt.)** Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $(1+t^2)x'(t) = 1+\big(x(t)\big)^2$, które spełnia warunek $x(0) = 1$.

*Rozwiązanie.*

Mamy $\operatorname{arctg} t + c = \int \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{x'(t)\,dt}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$. Stąd $x(t) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t + c)$. Z równości $1 = x(0) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0 + c) = \operatorname{tg} c$ wynika, że $c = \frac{\pi}{4}$. Wobec tego zachodzi równość:

$$x(t) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{t+1}{1-t}.$$

Rozwiązanie jest określone dla $t < 1$.

---

**5. (10 pt.)** Znaleźć taką funkcję $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ zmiennej $x$, że styczna do jej wykresu w dowolnym punkcie $X = (x, f(x))$ przecina dodatnią półoś poziomą układu współrzędnych w punkcie $P(x)$ i pole trójkąta $T$ o wierzchołkach $(0,0)$, $P(x)$ i $X$ jest $3$ razy większe od pola trójkąta prostokątnego o wierzchołku $(0,0)$, który powstaje w wyniku podzielenia trójkąta $T$ na dwa trójkąty wysokością poprowadzoną z wierzchołka $X$.

*Rozwiązanie.*

Ponieważ styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(x, f(x))$ ma przecinać pozioma oś układu współrzędnych, więc $f'(x) \neq 0$. Liczba $f'(x)$ to tangens kąta nachylenia stycznej do dodatniego kierunku osi $OX$. Wobec tego punktem przecięcia osi $OX$ ze styczną jest punkt $\big(x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\big)$ (ten wynk można też uzyskać pisząc równanie stycznej do wykresu funkcji $f$ w punkcie $\big(p, f(p)\big)$, czyli $y = f'(p)(x-p) + f(p)$ i wstawiając $0$ w miejsce $y$). Wysokość poprowadzona z wierzchołka $(x, f(x))$ ma być zawarta we wnętrzu trójkąta $T$, a to oznacza, że spełniona jest nierówność $f'(x) < 0$. Lewy trójkąt ma mieć trzy razy mniejsze pole niż trójkąt $T$. Oznacza to, że $3\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot f(x) = \frac{1}{2}\cdot\big(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\big)\cdot f(x)$, tzn. $2x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ (podzieliliśmy stronami przez $f(x) > 0$ i pomnożyliśmy przez $2$). Mamy więc $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1}{2x}$. Stąd $\ln|f(x)| = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$ albo $f(x) = \pm e^C \frac{1}{\sqrt{x}}$.Ponieważ wartości funkcji mają być dodatnie, więc rozwiązaniem zadania jest dowolna funkcja postaci $f(x) = \frac{e^C}{\sqrt{x}}$. Oczywiście w postaci $e^C$ można zapisać dowolna liczbę dodatnią (i żadnej innej, bo $C$ oznacza tu liczbę rzeczywistą).

---

*Kilka kwadratów dla potrzebujących:* $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $24^2 = 576$, $25^2 = 625$, $26^2 = 676$, $27^2 = 729$, $28^2 = 784$, $29^2 = 841$, $30^2 = 900$, $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, $33^2 = 1089$, $34^2 = 1156$, $35^2 = 1225$, $36^2 = 1296$, $37^2 = 1369$, $38^2 = 1444$, $39^2 = 1521$, $40^2 = 1600$, $41^2 = 1681$, $42^2 = 1764$, $43^2 = 1849$, $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$, $46^2 = 2116$, $47^2 = 2209$, $48^2 = 2304$, $49^2 = 2401$, $50^2 = 2500$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $55^2 = 3025$.

**Kilka iloczynów dla potrzebujących:** $8\cdot 12 = 96$, $6\cdot 18 = 108$, $4\cdot 24 = 96$, $11\cdot 24 = 264$, $4\cdot 26 = 104$, $3\cdot 27 = 81$, $5\cdot 27 = 135$, $11\cdot 27 = 297$, $4\cdot 32 = 128$, $5\cdot 32 = 160$, $8\cdot 32 = 256$, $11\cdot 32 = 352$, $5\cdot 37 = 185$, $8\cdot 37 = 296$, $4\cdot 54 = 216$, $6\cdot 54 = 324$.