

Matematyka A, kolokwium, 12 stycznia 2009, 18:05 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. Znaleźć trzeci i czwarty wielomian Taylora funkcji f w punkcie 1, jeśli
a. (5 pt.) $f(x) = x^4$, b. (5 pt.) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.
-

2. (10 pt.) Obliczyć $f^{(n)}(x_0)$, jeśli:
a. (3 pt.) $f(x) = \ln(1 + 3x)$, $n = 666$ i $x_0 = 0$,
b. (4 pt.) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $n = 966$ i $x_0 = 0$
c. (3 pt.) $f(x) = \sin x$, $n = 1966$ i $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
-

3. (10 pt.) Znaleźć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x)) + 2 \sin^2 x}{(\operatorname{tg} x) \cdot (x - \sin x)}$.
-

4. (10 pt.) Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^4(x+5)^2} \cdot (x^2 + 1)^{-1}$. Jeśli $0 \neq x \neq -5$, to zachodzą równości

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(5x^2 - 3x - 10)(x^2 + 1)^{-2} \sqrt[3]{\frac{x}{x+5}} \quad \text{oraz} \quad f''(x) = \frac{4}{9} \frac{15x^5 + 49x^4 - 135x^3 - 358x^2 + 30x + 25}{(x^2 + 1)^3 \sqrt[3]{x^2(x+5)^4}}.$$

Wielomian $5x^2 - 3x - 10$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{1}{10}(3 - \sqrt{209}) \approx -1,15$ oraz $x_2 = \frac{1}{10}(3 + \sqrt{209}) \approx 1,75$. Wielomian $15x^5 + 49x^4 - 135x^3 - 358x^2 + 30x + 25$ ma pięć pierwiastków rzeczywistych $x_3 \approx -4,00$, $x_4 \approx -2,14$, $x_5 \approx -0,24$, $x_6 \approx 0,29$ oraz $x_7 \approx 2,82$.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice funkcji f przy $x \rightarrow \pm\infty$, oraz granice f' przy $x \rightarrow \pm\infty$ i przy $x \rightarrow -5^\pm$.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f .

5. (10 pt.) Znaleźć $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 5x^2 + \sqrt{x} + e^x + \sin x)}{\ln(x^{1683} + \sqrt{1+x^2} + 2^x + \cos x)}$.
-