

Matematyka A, kolokwium, 3 grudnia 2008, 18:05 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x \neq 0$  spełniona jest nierówność

$$x^2 - \frac{1}{2}x^4 < \ln(1 + x^2) < x^2.$$

---

2. (10 pt.) Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.)  $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ,      b. (4 pt.)  $\arctg\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$       c. (3 pt.)  $\left(\frac{5x+3}{8x+5}\right)^{100}$ .

---

3. (10 pt.) Niech  $a$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Dla ilu liczb rzeczywistych  $x$  spełniona jest równość

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x = a?$$

Wynik może zależeć od  $a$ .

---

4. (10 pt.) Niech  $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{(\sqrt{5+x^2})^3}$ . Wiadomo, że

$$f'(x) = \frac{25(x-1)(x+1)}{(\sqrt{5+x^2})^5} \text{ oraz } f''(x) = \frac{-75x(x^2-5)}{(\sqrt{5+x^2})^7}.$$

Znaleźć przedziały, na których funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca, na których jest ściśle wypukła, na których jest ściśle wklęsła. Korzystając z uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji  $f$ .

---

5. (10 pt.) Znaleźć na paraboli  $y = x^2$  punkt, który leży najbliżej punktu  $(4, \frac{7}{2})$ .
-