Matematyka A, kolokwium, 14 listopada 2008, 18:05 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (5 pt.) Znaleźć $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 111 & -1 \end{vmatrix}$.

---

2. (2 pt.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta $t > 0$.

(2 pt.) Rozwiązać nierówność $4y^2 - 7y + 3 > 0$.

(3 pt.) Rozwiązać nierówność $4\cos^4 t - 7\cos^2 t + 3 > 0$.

(3 pt.) Na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zaznaczyć łuki złożone z punktów, przez które przechodzi drugie ramie kąta spełniającego tę nierówność przy założeniu, że pierwszym ramieniem takiego kąta jest półprosta $\{(x, 0): \quad x \geq 0\}$.

---

3. (3 pt.) Podać definicję logarytmu liczby a przy podstawie b. Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?

(3 pt.) Wykazać (nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów — kartka i pisadło wystarczą), że zachodzi nierówność $2 + \log 5 + 3\log 7 < 11\log 3 < -1 + 6\log 11$.

---

4. (3 pt.) Rozwiązać równanie: $\log(2x^3 - 4x^2 + 22) = 1 + \log(x + 1)$.

---

5. Niech $A = (1, 1, 1)$, $B = (7, 4, 3)$, $C = (3, 2, 3)$.

(3 pt.) Znaleźć wektory $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AB}$ oraz ich długości.

(3 pt.) Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABC.

(3 pt.) Znaleźć $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

(2 pt.) Znaleźć pole trójkąta ABC.

(1 pt.) Znaleźć środek M_A odcinka BC.

(3 pt.) Znaleźć punkt X na odcinku AM_A, który dzieli ten odcinek w stosunku $3:1$, tzn. odległość punktu X od wierzchołka A ma być trzykrotnie większa od jego odległości od punktu M_A.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $3^3 = 27$, $3^6 = 729$, $3^9 = 19683$, $3^{12} = 531441$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $11^5 = 161051$, $11^6 = 1771561$, $11^7 = 12400927$, $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$, $7^6 = 117649$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.