

Matematyka A, egzamin, 9 września 2008

12:05 — 15:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

1. Znaleźć promień i środek okręgu, który zawiera zbiór A złożony ze wszystkich tych liczb zespolonych z , dla których $\frac{i}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{i}{2} \in \mathbb{R}$. Znaleźć punkty opisanego okręgu, które nie są elementami zbioru A , o ile takie istnieją.
-

2. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w tym zespolone.
-

3. Znaleźć wszystkie takie nieskończenie wiele razy różniczkowalne funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x, f(x))$ przechodzi przez punkt $(\frac{x}{2}, 0)$.
-

4. Rozwiązać równanie różniczkowe $tx' + (1 - 2t)x = 3t^2 e^{2t}$.
Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunek $x(1) = 0$.
-

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 8e^t - 17 \cos(2t) - e^{-t} \sin(2t)$.
-

6. Niech $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - 12xy$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w prostokącie $Q = \{(x, y): -1 \leq x \leq 6 \text{ i } -1 \leq y \leq 12\}$.
-