Matematyka A, egzamin, 19 czerwca 2008, rozwiązania

1. Znaleźć promień i środek okręgu, która zawiera zbiór złożony ze wszystkich tych liczb zespolonych z, dla których $\frac{z+1}{z-1}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=0$.

Rozwiązanie: Mnożąc stronami równość $\frac{z+1}{z-1}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=0$ przez $(z-1)(\overline{z}-1)$ otrzymujemy: $0=(z+1)(\overline{z}-1)+(\overline{z}+1)(z-1)=2|z|^2-2=2(|z|^2-1)$, zatem $|z|=1$. Otrzymaliśmy równanie okręgu, którego środkiem jest punkt 0, a promieniem jest liczba 1. Oczywiście wyjściowe równanie nie jest spełnione dla $z=1$, bo w mianowniku liczba 0 pojawić się nie może. Wobec tego równanie $\frac{z+1}{z-1}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=0$ opisuje okrąg o środku w punkcie 0 i promieniu 1 z wyłączeniem punktu $z=1$. ■

---

2. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\1&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$ w tym zespolone.

Rozwiązanie: Równanie charakterystyczne tej macierzy to:

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&1\\0&1-\lambda&1&1\\1&-1&1-\lambda&0\\-1&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\underline{\underline{pierwszy}}}{\underset{wiersz}{=}}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\-1&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}0&1-\lambda&1\\1&-1&1-\lambda\\-1&0&0\end{vmatrix}\overset{\underline{\underline{trzeci}}}{\underset{wiersz}{=}}(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\big((1-\lambda)^1+1\big)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\big((1-\lambda)^2+1\big)^2.$$

Wynika stąd, że jeśli λ jest wartością własną, to $(1-\lambda)^2=-1$, zatem $1-\lambda=\pm i$, więc $\lambda=1\mp i$. Mamy więc $\big((1-\lambda)^2+1\big)^2=\big(\lambda-(1-i)\big)^2\big(\lambda-(1+i)\big)^2$, więc obie te wartości własne są podwójne, a to oznacza, że odpowiadające im podprzestrzenie własne mogą być jednowymiarowe lub dwuwymiarowe. Zajmiemy się wartością własną $1+i$. Załóżmy, że kolejnymi współrzędnymi jej wektora własnego są liczby x_1,x_2,x_3,x_4. Z definicji wektora własnego wynika, że spełnione są następujące cztery równości $x_1+x_4=(1+i)x_1$, $x_2+x_3+x_4=(1+i)x_2$, $x_1-x_2+x_3=(1+i)x_3$ oraz $-x_1+x_4=(1+i)x_4$. Po uproszczeniu pierwsza z nich wygląda tak $x_4=ix_1$, a czwarta $-x_1=ix_4$. Są one więc równoważne, po druga z nich to pierwsza pomnożona stronami przez i. Podstawiając $x_4=ix_1$ do drugiego równania wyjściowego układu otrzymujemy $x_3+ix_1=ix_2$, Trzecie równanie przybiera postać $x_1-x_2=ix_3$. Widać, że te dwa równania są równoważne, wystarczy przenieść wszystko na jedną stronę i pomnożyć jedno z nich przez i. Możemy zatem przyjąć np. $x_1=1$ oraz $x_2=0$. Wtedy $x_3=i(x_2-x_1)=-i$ oraz $x_4=i$. Znaleźliśmy jeden z wektorów własnych: $\vec{\mathbf{v}}=\overrightarrow{(1,0,-i,i)}$. W taki sam sposób stwierdzamy, że wektor $\vec{\mathbf{w}}=\overrightarrow{(0,1,i,0)}$ jest też wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $1+i$. Jasne jest, że nie istnieje taka liczba zespolona c, że $\vec{\mathbf{v}}=c\vec{\mathbf{w}}$ lub $\vec{\mathbf{w}}=c\vec{\mathbf{v}}$, a to oznacza, że każdy inny wektor własny odpowiadający wartości własnej $1+i$ można zapisać w postaci $c_1\vec{\mathbf{v}}+c_2\vec{\mathbf{w}}$, gdzie $c_1,c_2\in\mathbb{C}$

(bo zbiór wektorów własnych jest podprzestrzenią wymiaru > 1 i jednocześnie ≤ 2, więc wymiaru 2).

Ponieważ wszystkie wyrazy macierzy są rzeczywiste oraz $1-i=\overline{1+i}$, więc wektorami własnymi odpowiadającym wartości własnej są $\overrightarrow{(1,0,i,-i)}$ oraz $\overrightarrow{(0,1,-i,0)}$ — zastąpiliśmy wszystkie współrzędne liczbami sprzężonymi. Pozostałe wektory własne odpowiadające tej wartości własnej to $c_1\overrightarrow{(1,0,i,-i)}+c_2\overrightarrow{(0,1,-i,0)}$, gdzie $c_1,c_2\in\mathbb{C}$. ■

---

3. Szybkość stygnięcia ciała jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otaczającego go powietrza. W ciągu 10 minut temperatura ciała zmalała ze $100°$ C do $60°$ C. Temperatura powietrza równa jest $20°$ C. Po jakim czasie temperatura ciała zmniejszy się do $25°$ C?

Rozwiązanie: Oznaczmy przez $T(t)$ temperaturę stygnącego ciała w chwili t, przy czym spełnione są równości $T(0)=100$ i $T(10)=60$. Niech k oznacza współczynnik proporcjonalności, która występuje w treści zadania. Dla dostatecznie małej liczby Δt zachodzi **przybliżona** równość $\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}\approx k\big(T(t)-20\big)$. Po przejściu do granicy przy $\Delta t\longrightarrow 0$ otrzymujemy równanie $T'(t)=k\big(T(t)-20\big)$, czyli

$$kt+C=\int k\,dt=\int\frac{T'(t)}{T(t)-20}\,dt=\int\frac{dT}{T-20}=\ln|T-20|\,.$$

Z treści zadania wynika od razu, że $T>20$. Wobec tego $T-20=T(t)-20=e^C\cdot e^{kt}$. Mamy $60=T(10)=20+e^C\cdot e^{10k}$ oraz $100=T(0)=20+e^C\cdot e^{k\cdot 0}=20+e^C$. Wynika stąd, że

$$T(t)=20+80e^{kt}=20+80\big(e^{10k}\big)^{t/10}=20+80\big(\tfrac{40}{80}\big)^{t/10}=20+80\big(\tfrac{1}{2}\big)^{t/10}.$$

Mamy znaleźć taką liczbę t, że $25=T(t)=20+80\big(\frac12\big)^{t/10}$, czyli $5=80\big(\frac12\big)^{t/10}$, a to oznacza, że $\frac{1}{16}=\big(\frac12\big)^{t/10}$. Wynika stąd, że $\frac{t}{10}=4$, zatem $t=40$. ■

---

4. Rozwiązać równanie różniczkowe $tx'+(t+1)x=3t^2e^{-t}$.
Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunek $x(1)=0$.

Rozwiązanie: Rozwiążemy najpierw równanie jednorodne $tx'+(t+1)x=0$. Można je przepisać w postaci $\frac{x'}{x}=-\frac{t+1}{t}=-1-\frac1t$. Po scałkowaniu tej równości stronami otrzymujemy $\ln|x(t)|=-t-\ln|t|+C$. Stąd $x(t)=\pm e^C\cdot e^{-t}\cdot\frac1t$. Oznaczając $K=\pm e^C$ otrzymujemy równość $x(t)=\frac{K}{t}e^{-t}$.

Teraz znajdziemy rozwiązanie równania niejednorodnego uzmienniając stałą K, czyli przyjmując, że $K=K(t)$ jest funkcją zmiennej t. Szukamy zatem rozwiązania w postaci $K(t)\frac1t e^{-t}$. Podstawiając to wyrażenie do równania $tx'+(t+1)x=3t^2e^{-t}$ w miejsce $x(t)$ otrzymujemy

$$3t^2e^{-t}=K'(t)e^{-t}+K(t)\big(\tfrac1t e^{-t}\big)'+(t+1)K(t)\tfrac1t e^{-t}=K'(t)e^{-t}+K(t)\Big(\big(\tfrac1t e^{-t}\big)'+(t+1)\tfrac1t e^{-t}\Big)=$$
$$=K'(t)e^{-t}$$

— ostatnia równość jest konsekwencją tego, że funkcja $\frac1t e^{-t}$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Upraszczając otrzymujemy $K'(t)=3t^2$, zatem $K(t)=t^3+c$, gdzie c oznacza pewną stałą. Wobec tego $x(t)=\big(t^3+c\big)\frac1t e^{-t}$.

Mamy znaleźć rozwiązanie spełniające warunek początkowy $0 = x(1) = (1+c)e^{-1}$. Stąd wynika, że $c = -1$, zatem poszukiwana funkcja to $\big(t^3-1\big)\frac{1}{t}e^{-t}$. Jej dziedziną jest półprosta $(0,\infty)$, bo dziedziną rozwiązania równania różniczkowego ma być **przedział**, w tym przypadku zawierający liczbę 1.

Uwaga: Rozwiązanie można skrócić wprowadzając pomocniczą funkcję $y(t) = tx(t)$. Wtedy wyjściowe równanie przyjmuje postać $y'(t) + y = 3t^2e^{-t}$. Na taki pomysł wpadają z łatwością te osoby, które rozwiązały trochę zadań samodzielnie, bo widzą, że $tx' + x = (tx)'$. ■

---

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\quad x''(t)-2x'(t)+5x(t) = 4e^t+17\cos(2t)-12e^t\sin(2t)$.

Rozwiązanie: Mamy do czynienia z równaniem liniowym niejednorodnym o stałych współczynnikach. Równanie charakterystyczne to $0 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda-1)^2 + 4$. Jego pierwiastkami są więc liczby $1 \pm 2i$. Wynika stąd, że rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać $c_1e^{(1+2i)t} + c_2e^{(1-2i)t}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają liczby zespolone.

Po prawej stronie występują quasiwielomiany (e^t) lub ich części rzeczywiste ($17\cos(2t)$) bądź urojone ($-12e^t\sin(2t)$). Liczba 1 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje taka liczba c, że funkcja ce^t jest rozwiązaniem równania

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 4e^t\,.$$

By tak było musi być spełniona równość $c - 2c + 5c = 4$, czyli $c = 1$. Poszukiwanym rozwiązaniem jest funkcja e^t.

Kolej na równanie $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t) = \mathrm{Re}\big(17e^{2it}\big)$. Rozwiążemy równanie $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17e^{2it}$. Ponieważ liczba $2i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje taka liczba zespolona c, że funkcja ce^{2it} jest rozwiązaniem równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17e^{2it}$. Podstawiając ce^{2it} w miejsce x w tym równaniu otrzymujemy $-4ce^{2it} - 4cie^{2it} + 5ce^{2it} = 17e^{2it}$, czyli $c(1-4i)e^{2it} = 17e^{2it}$. Wobec tego $c = \frac{17}{1-4i} = 1+4i$. Wobec tego funkcja $(1+4i)e^{2it}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17e^{2it}$, a ponieważ wszystkie współczynniki z lewej jego strony są liczbami rzeczywistymi, więc funkcja $\mathrm{Re}\big((1+4i)e^{2it}\big) = \mathrm{Re}\big((1+4i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\big) = \cos(2t) - 4\sin(2t)$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t)$.

Wreszcie równanie $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -12e^t\sin(2t) = \mathrm{Im}\big(-12e^{(1+2i)t}\big)$. Tym razem liczba $1+2i$ jest pierwiastkiem jednokrotnym równania charakterystycznego, więc rozwiązaniem równania $c_1e^{(1+2i)t}$ będzie quasiwielomian stopnia pierwszego z wykładnikiem $1+2i$, czyli funkcja postaci $(ct+d)e^{(1+2i)t}$, gdzie symbole c, d oznaczają liczby zespolone. Z tego, jak wygląda rozwiązanie równania jednorodnego, jasno wynika, że nie ma żadnych ograniczeń na liczbę d (w rozwiązaniu występuje składnik $c_1e^{(1+2i)t}$, więc można uznać, że $d = c_1$). Znajdziemy c. Podstawiamy do równania $x''(t)-2x'(t)+5x(t) = -12e^{(1+2i)t}$ funkcję $cte^{(1+2i)t}$. Otrzymujemy

$$-12e^{(1+2i)t} = 2c(1+2i)e^{(1+2i)t} + ct(1+2i)^2e^{(1+2i)t} - 2ce^{(1+2i)t} - 2ct(1+2i)e^{(1+2i)t} + 5cte^{(1+2i)t} = \\ = 4ice^{(1+2i)t}\,,$$

zatem $c = 3i$. Wobec tego, że wszystkie współczynniki po lewej stronie równania są rzeczywiste, funkcja $\operatorname{Im}\big(3ite^{(1+2i)t}\big) = 3te^t\cos(2t)$ jest rozwiązaniem szczególnym ostatniego równania pomocniczego $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -12e^t\sin(2t)$.

Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 4e^t + 17\cos(2t) - 12e^t\sin(2t)$$

jest funkcja $e^t + \cos(2t) - 4\sin(2t) + 3te^t\cos(2t) + c_1e^{(1+2i)t} + c_2e^{(1-2i)t}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają dowolne liczby zespolone. Można bez trudu zauważyć, że jeśli $c_2 = \overline{c_1}$, to wartości tej funkcji są rzeczywiste. Można też zapisać to samo rozwiązanie w postaci

$$e^t + \cos(2t) - 4\sin(2t) + 3te^t\cos(2t) + d_1e^t\cos(2t) + d_2e^t\sin(2t).$$

W tym przypadku rozwiązania rzeczywiste otrzymujemy dla rzeczywistych d_1, d_2. ■

---

6. Niech $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kwadracie $Q = \{(x,y)\colon\ \ -1 \le x \le 13 \quad \text{i} \quad -1 \le y \le 13\}$.

Rozwiązanie: Wielomian jest funkcją ciągłą w całej płaszczyźnie, więc również w każdym punkcie kwadratu Q, który jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów mówi, że w pewnym punkcie kwadratu przyjmowana jest największa spośród wszystkich wartości przyjmowanych w punktach kwadratu. Może ona być przyjmowana w punkcie brzegu kwadratu lub w punkcie wewnętrznym. W drugim przypadku obie pochodne cząstkowe muszą być równe 0. To samo dotyczy najmniejszej wartości tej funkcji. Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - 3y = y(2x + y - 3)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - 3x = x(x + 2y - 3)$. Łatwo można zauważyć, że układ równań $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ równoważny jest temu, że spełniony jest co najmniej jeden z następujących układów:

$x = 0 = y$, $\quad x = 0 = 2x + y - 3$, $\quad y = 0 = x + 2y - 3$ i $\quad 2x + y - 3 = 0 = x + 2y - 3$.

Mamy więc cztery punkty krytyczne: $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$ i $(1,1)$. Ponieważ $f(0,0) = 0$, $f(3,0) = f(0,3) = 0$ i $f(1,1) = -1$, więc -1 nie jest największą wartością funkcji f na kwadracie Q, a 0 nie jest jej najmniejszą wartością. Przyjrzymy się punktom brzegu kwadratu Q. Mamy $f(-1,y) = y - y^2 + 3y = y(4-y) \le 2(4-2) = 4$ przy czym równość zachodzi jedynie dla $y = 2$ (własności paraboli!). Mamy też $f(-1,-1) = -5$ i $f(-1,13) = -13\cdot 9 = -117$, zatem jeśli $-1 \le y \le 13$, to $-117 \le f(-1,y) \le 4$. W taki sam sposób stwierdzić można, że jeśli $-1 \le x \le 13$, to $-117 \le f(x,-1) \le 4$. Dalej $f(13,y) = 169y + 13y^2 - 39y = 13y(y+10) \ge$ $\ge 13(-1)(-1+10) = -117$ — cały przedział $[-1,13]$ leży po prawej stronie punktu -5, w którym funkcja kwadratowa przyjmuje swą najmniejszą wartość, więc na przedziale $[-1,13]$ funkcja $13y(y+10)$ jest ściśle rosnąca. Stąd $-117 \le f(13,y) \le f(13,13) = 13\cdot 13\cdot 23$ dla $y \in [-1,13]$. Analogicznie $-117 \le f(x,13) \le 13^2\cdot 23$ dla $x \in [-1,13]$. Wynika stąd, że najmniejszą wartością funkcji f na kwadracie Q jest liczba $-117 = f(-1,13) = f(13,-1)$, a największą — liczba $f(13,13) = 13^2\cdot 23 = 3887$.

Uwaga: można sprawdzić, że w punkcie $(1,1)$ funkcja f ma lokalne minimum właściwe; jest to najmniejsza wartość funkcji spośród przyjmowanych w punktach trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(3,0)$ i $(0,3)$. ■
