Egzamin poprawkowy z matematyki dla studentów chemii, 27 lutego 2008, 17:25 – 20:25

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek! Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały pojawiły się na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_b c$ pamiętając o założeniach o b i c.

Znaleźć $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$.

Wykazać, że $\log_{10} \frac{5}{3} < \frac{2}{9}$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta.

Rozwiązać nierówność: $\sin t - \cos t > 1$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. Niech $f(x) = 9\sqrt[3]{x^5(x+1)^2} \cdot (x^2+1)^{-2}$. Jeśli $0 \neq x \neq -1$, to zachodzą równości

$$f'(x) = -\frac{3(x-1)(5x^2+12x+5)}{(x^2+1)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \quad \text{oraz} \quad f''(x) = 2\frac{20x^6+56x^5-39x^4-140x^3-54x^2+20x+5}{(x^2+1)^3\sqrt[3]{x(x+5)^4}}.$$

Wielomian $5x^2+12x+5$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{1}{5}(-6-\sqrt{11}) \approx -1{,}863$ i $x_2 = \frac{1}{5}(-6+\sqrt{11}) \approx -0{,}537$. Wielomian $20x^6+56x^5-39x^4-140x^3-54x^2+20x+5$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste $x_3 \approx -2{,}722$, $x_4 \approx -0{,}1196$, $x_5 \approx 0{,}337$ oraz $x_6 \approx 1{,}606$, wszystkie one są pojedyncze.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice funkcji f przy $x \longrightarrow \pm\infty$, oraz granice f' przy $x \longrightarrow \pm\infty$ i przy $x \longrightarrow -1^{\pm}$.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Obliczyć

$$\text{wyznacznik} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{sumę} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{iloczyn} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

5. Niech $\mathbf{A} = (1,0,0)$, $\mathbf{B} = (0,2,2)$, $\mathbf{C} = (15,5,2)$, $\mathbf{O} = (0,0,0)$.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}} = \overrightarrow{[0,0,0]}$ prostopadły do płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć równanie płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć w płaszczyźnie $\mathbf{ABC}$ jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{0}} = \overrightarrow{[0,0,0]}$ prostopadły do prostej $\mathbf{BC}$.

Znaleźć rzut punktu $\mathbf{A}$ na prostą $\mathbf{BC}$ i odległość punktu $\mathbf{A}$ od tej prostej.

Znaleźć kosinusy wszystkich trzech kątów wewnętrznych trójkąta $\mathbf{ABC}$.

---

6. Na paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ znaleźć punkt, którego odległość od punktu $(24,15)$ jest najmniejsza.

Informacje pożyteczne lub zbędne: $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, $5^5 = 3125$, $5^6 = 15625$, $5^7 = 78125$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$, $3^8 = 6561$, $3^9 = 19683$, $3^{10} = 59049$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$, $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 7{,}5^\circ = \sqrt{6} - 2 - \sqrt{3} + \sqrt{2}$.