Egzamin z matematyki dla studentów chemii, 5 lutego 2008, 9:10 – 12:15

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek! Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały pojawiły się na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_c b$ pamiętając o założeniach o c i b.
Wykazać, że $0{,}4+\log_{10}6>\log_{10}15>1{,}2\log_{10}12-\log_{10}\sqrt[5]{4}$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta.

Rozwiązać nierówność: $\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t>\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^4(x+5)^2}\cdot(x^2+1)^{-1}$. Jeśli $0\neq x\neq -5$, to zachodzą równości

$f'(x)=-\frac{2}{3}(5x^2-3x-10)(x^2+1)^{-2}\sqrt[3]{\frac{x}{x+5}}$ oraz $f''(x)=\frac{4}{9}\,\frac{15x^5+49x^4-135x^3-358x^2+30x+25}{(x^2+1)^3\sqrt[3]{x^2(x+5)^4}}$.

Wielomian $5x^2-3x-10$ ma dwa pierwiastki: $x_1=\frac{1}{10}(3-\sqrt{209})\approx-1{,}15$ i $x_2=\frac{1}{10}(3+\sqrt{209})\approx1{,}75$. Wielomian $15x^5+49x^4-135x^3-358x^2+30x+25$ ma pięć pierwiastków rzeczywistych $x_3\approx-4{,}00$, $x_4\approx-2{,}14$, $x_5\approx-0{,}24$, $x_6\approx0{,}29$ oraz $x_7\approx2{,}82$.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice funkcji f przy $x\longrightarrow\pm\infty$, oraz granice f' przy $x\longrightarrow\pm\infty$ i przy $x\longrightarrow-5^{\pm}$.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Obliczyć

wyznacznik $\begin{vmatrix}3&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{vmatrix}$, sumę $\begin{pmatrix}3&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&0&0&3\end{pmatrix}$, iloczyn $\begin{pmatrix}3&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&0&0&3\end{pmatrix}$.

---

5. Niech $\mathbf{A}=(1,0,0)$, $\mathbf{B}=(0,2,2)$, $\mathbf{C}=(15,5,2)$, $\mathbf{O}=(0,0,0)$.

Znaleźć objętość czworościanu **OABC**.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}}\neq\vec{\mathbf{0}}=\overrightarrow{[0,0,0]}$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

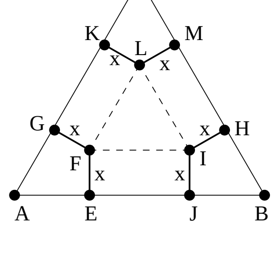
Znaleźć pole trójkąta **ABC** i wyjaśnić, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Znaleźć równanie płaszczyzny **ABC**.

Znaleźć kosinusy obu kątów utworzonych przez płaszczyznę **ABC** i płaszczyznę o równaniu $x+y+z=1$.

---

6. Z tekturowego trójkąta równobocznego ABC o boku a odcięto trzy deltoidy $AEFG$, $BHIJ$, $CKLM$ przy czym: punkty E,J leżą na boku AB, punkty H,M — na boku BC, punkty KG na boku CA, zaś punkty F,I,L — wewnątrz trójkąta ABC; odcinki FE oraz IJ są prostopadłe do boku AB, odcinki IH oraz LM — do boku BC, odcinki LK oraz FG — do boku CA; długość każdego odcinków z tych sześciu odcinków jest równa x. Następnie zagięto tekturę uzyskując pudełko o wysokości x, otwarte z góry, którego denkiem jest trójkąt FIL. Dla jakiego x pojemność powstałego pudełka jest największa?



Informacje pożyteczne lub zbędne: $5^3=125$, $5^4=625$, $5^5=3125$, $5^6=15625$, $5^7=78125$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $\sin210^\circ=-\frac{1}{2}$, $\cos330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}7{,}5^\circ=\sqrt{6}-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}$.