Matematyka A, kolokwium, 21 stycznia 2007, 17:20 — 19:15

Rozwiązania zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. *Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x^2(x-12)^4}$. Wtedy $f'(x) = (x-8)(3x-4)\sqrt[3]{\frac{x-12}{x}}$ dla $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{2(x-4)(3x^2-32x-16)}{\sqrt[3]{x^4(x-12)^2}}$ dla $x \notin \{0,\ 12\}$, $x_1 = \frac{16-4\sqrt{19}}{3} \approx -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{16+4\sqrt{19}}{3} \approx 11{,}1$, $f''(x_1) = 0 = f''(x_2)$.

(3 pt.) Czy istnieją $f'(0)$, $f''(0)$ i $f''(12)$? Odpowiedź należy uzasadnić.

(4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca i wszystkie lokalne ekstrema funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle wypukła, na których jest ściśle wklęsła i wszystkie punkty przegięcia funkcji f.

(4 pt.) Korzystając z uzyskanych rezultatów naszkicować wykres funkcji f.

---

2. (1 pt.) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji $\sin x$ w punkcie $p = 0$.

(2 pt.) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji $\operatorname{tg} x$ w punkcie $p = 0$.

(1 pt.) Znaleźć pierwszy wielomian Taylora funkcji $\sqrt{1+x}$ w punkcie $p = 0$.

(6 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - \sin x}}{\sqrt{1+x}-1}$.

---

3. (5 pt.) Znaleźć taką liczbę $a \in \mathbb{R}$, że granica $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{4+3x+2x^2} - ax^2\right) \cdot x^{-1}$

jest **skończona** oraz

(5 pt.) granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{4+3x+2x^2} - ax^2 - bx\right)$.

---

4. (5 pt.) Znaleźć najmniejszą taką liczbę L, że nierówność $\left|\sqrt{9+x^2} - \sqrt{9+y^2}\,\right| \leq L|x-y|$ zachodzi dla wszystkich $x, y \geq 4$.

(5 pt.) Znaleźć największą taką liczbę ℓ, że nierówność $\ell|x-y| \leq \left|\sqrt{9+x^2} - \sqrt{9+y^2}\,\right|$ zachodzi dla wszystkich $x, y \geq 4$.

---

5. Niech $f(x) = x\big[1 - \ln 2 + \ln(2+x)\big] - (x+1)\ln(x+1)$.

(1 pt.) Obliczyć $f(0)$.

(6 pt.) Obliczyć $f'(x)$, $f'(0)$ i $f''(x)$ i wykazać, że $f''(x) > 0$ dla $x > 0$.

(8 pt.) Udowodnić, że dla dowolnej liczby $x > 0$ zachodzi nierówność

$$x\big[1 - \ln 2 + \ln(2+x)\big] > (x+1)\ln(x+1).$$

Ciekawostki

kolejnymi pochodnymi funkcji tangens w punkcie 0 są liczby: $1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 16,\ 0,\ 272, \ldots,$

kolejnymi pochodnymi funkcji sinus w punkcie 0 są liczby: $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1, \ldots$

kolejnymi pochodnymi funkcji $\ln$ w punkcie 1 są liczby: $1,\ -1,\ 2,\ -6,\ 24,\ -120,\ 720, \ldots$

kolejnymi pochodnymi funkcji x^a w punkcie 1 są liczby: $a,\ a(a-1),\ a(a-1)(a-2), \ldots$