Matematyka A, kolokwium poprawkowe, 16 stycznia 2007, 12:30 — ?

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7,1^n - 3\cdot\sqrt{n^5}\cdot 7^n + \sqrt[5]{n^2}\cdot 7^n + 2n!}{-2\cdot n\cdot 7^{n+1} + n! + 13\cdot 7,1^n + 11\cdot n^{2008}\cdot 7^n}$.

---

2. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(5\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[7]{n+\sqrt{n}} - n)}{\ln(5n^2 + 3n + \sin(\pi\sqrt{n^2+1}\,))}$.

Wyjaśnić, czy istnieje taka liczba naturalna $k > 1$, że dla każdej liczby naturalnej $n > k$ zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(5\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[7]{n+\sqrt{n}} - n)}{\ln(5n^2 + 3n + \sin(\pi\sqrt{n^2+1}\,))} > \dfrac{3}{4}$.

---

3. Niech $a_n = \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{4n+2} + \dfrac{1}{4n+4} + \dfrac{1}{4n+6} + \dots + \dfrac{1}{6n-4} + \dfrac{1}{6n-2} + \dfrac{1}{6n}$.

(2 pt.) Obliczyć a_1, a_2 i a_3 i wypisać je w kolejności **malejącej**.

(8 pt.) Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i że ta granica jest różna od 0.

---

4. (10 pt.) Znaleźć pochodne następujących funkcji:

$$\operatorname{arctg}(x^2)\,, \qquad \big(\sin(3x)\big)^{\cos(2x)}\,, \qquad \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + \ln(\cos x) - \ln\tfrac{x}{\sin x}$$

określonych na przedziale $(0, \frac{\pi}{4})$.

---

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - \frac{2}{x^2}}$.

(3 pt.) W jakich punktach funkcja f nie ma skończonej pochodnej (tzn. jest nieróżniczkowalna)? Odpowiedź należy uzasadnić.

(4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca.

(3 pt.) Korzystając z uzyskanych rezultatów naszkicować wykres funkcji f.
Nie badać wypukłości, **nie** szukać asymptot ...

---

6. (10 pt.) Znaleźć promień podstawy i wysokość tego stożka opisanego na kuli o promieniu 1, który ma najmniejszą objętość spośród wszystkich opisanych na tej kuli.