Matematyka A, kolokwium poprawkowe, 5 stycznia 2007, 18:10 — 20:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7,1^n - 3\cdot\sqrt{n^5}\cdot 7^n + \sqrt[5]{n^2}\cdot 7^n}{-2\cdot n\cdot 7^{n+1} + 13\cdot 7,1^n + 11\cdot n^{2008}\cdot 7^n}$.

---

2. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(\sqrt[27]{n^{36}} + \sqrt[7]{n+\sqrt{n}} - \cos n)}{\ln(5n^2+3n+\sin(\pi\sqrt{n^2+1}\,))}$.

Wyjaśnić, czy istnieje taka liczba naturalna $k>1$, że dla każdej liczby naturalnej $n>k$ zachodzi nierówność $\dfrac{\ln(\sqrt[27]{n^{36}} + \sqrt[7]{n+\sqrt{n}} - \cos n)}{\ln(5n^2+3n+\sin(\pi\sqrt{n^2+1}\,))} > \dfrac{1}{2}$.

---

3. Niech $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \dfrac{1}{n^2+3} + \dots + \dfrac{1}{2n^2-2} + \dfrac{1}{2n^2-1} + \dfrac{1}{2n^2}$.

(2 pt.) Obliczyć a_1, a_2 i a_3 i wypisać je w kolejności **malejącej**.

(8 pt.) Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i że ta granica jest różna od 0.

---

4. (10 pt.) Znaleźć pochodne następujących funkcji:

$$\operatorname{arctg}(5x)\,,\qquad \cos(3x)^{\sin(2x)}\,,\qquad \ln(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) + \ln(\cos x) - \ln\tfrac{x}{\sin x}$$

określonych na przedziale $(0, \frac{\pi}{4})$.

---

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \frac{2}{x}}$.

(3 pt.) W jakich punktach funkcja f nie ma skończonej pochodnej (tzn. jest nieróżniczkowalna)? Odpowiedź należy uzasadnić.

(4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca.

(3 pt.) Korzystając z uzyskanych rezultatów naszkicować wykres funkcji f.
Nie badać wypukłości, **nie** szukać asymptot …

---

6. (4 pt.) Niech $b>1$ będzie liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć liczbę $k>0$ tak, by prosta L o równaniu $y=kx+b$ miała dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Znaleźć punkt wspólny prostej L z prostą o równaniu $y=-1$.

(6 pt.) Niech $A=(0,-1)$, $B=(0,b)$ dla $b>1$ i C oznacza punkt znaleziony w poprzedniej części zadania. Znaleźć taką liczbę $b>1$, żeby pole trójkąta ABC było najmniejsze.
