Matematyka A, kolokwium, 5 grudnia 2007, 18:10 — 19:40

Uzupełniłem rozwiązanie zadania piątego 2 stycznia 2008.

1. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n!-3n^n+5n^2\cdot 2007^n}{-2n!+13n^n+11n\cdot 2007^n}$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Rozwiązanie: Ponieważ $0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\le\frac{1}{n}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$. Jeśli $n>6000$, to $0<\frac{n^2 2007^n}{n^n}=2007^2\cdot\left(\frac{2007}{n}\right)^{n-2}<4028014\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=16112056\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2 2007^n}{n^n}=0$. Ponieważ $0<\frac{n\cdot 2007^n}{n^n}\le\frac{n^2 2007^n}{n^n}$, więc również $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2007^n}{n^n}=0$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n!-3n^n+5n^2\cdot 2007^n}{-2n!+13n^n+11n\cdot 2007^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot\frac{n!}{n^n}-3+5\cdot\frac{n^2 2007^n}{n^n}}{-2\cdot\frac{n!}{n^n}+13+11\cdot\frac{n\cdot 2007^n}{n^n}}=$$

$$=\frac{7\cdot 0-3+5\cdot 0}{-2\cdot 0+13+11\cdot 0}=\frac{-3}{13}.$$

---

2. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^{27}+n-\cos n)}{\ln(n^{10}+5n+\sin n^n)}$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Wyjaśnić, czy istnieje taka liczba naturalna $k>1$, że dla każdej liczby naturalnej $n>k$ zachodzi nierówność $\frac{\ln(n^{27}+n-\cos n)}{\ln(n^{10}+5n+\sin n^n)}>10$.

Rozwiązanie: $0\le\left|\frac{\cos n}{n^{27}}\right|\le\frac{1}{n^{27}}\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $0\le\left|\frac{\sin n^n}{n^{10}}\right|\le\frac{1}{n^{10}}\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^{27}+n-\cos n)}{\ln(n^{10}+5n+\sin n^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^{27}+\ln(1+\frac{1}{n^{26}}-\frac{\cos n}{n^{27}})}{\ln n^{10}+\ln(1+\frac{5}{n^9}-\frac{\sin n^n}{n^{10}})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{27\ln n+\ln(1+\frac{1}{n^{26}}-\frac{\cos n}{n^{27}})}{10\ln n+\ln(1+\frac{5}{n^9}-\frac{\sin n^n}{n^{10}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{27+\frac{\ln(1+\frac{1}{n^{26}}-\frac{\cos n}{n^{27}})}{\ln n}}{10+\frac{\ln(1+\frac{5}{n^9}-\frac{\sin n^n}{n^{10}})}{\ln n}}=\frac{27+\frac{\ln(1+0-0)}{\infty}}{10+\frac{\ln(1+0-0)}{\infty}}=\frac{27}{10}.$$

Z definicji granicy ciągu wynika więc, że istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby naturalnej $n>n_0$ zachodzi nierówność $\left|\frac{\ln(n^{27}+n-\cos n)}{\ln(n^{10}+5n+\sin n^n)}-\frac{27}{10}\right|<\frac{3}{10}$, a z niej wynika, że $\frac{\ln(n^{27}+n-\cos n)}{\ln(n^{10}+5n+\sin n^n)}-\frac{27}{10}<\frac{3}{10}$, więc $\frac{\ln(n^{27}+n-\cos n)}{\ln(n^{10}+5n+\sin n^n)}<\frac{27}{10}+\frac{3}{10}=3<10$.

---

3. Niech $a_n=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+7}+\cdots+\frac{1}{6n-2}$.

(2 pt.) Obliczyć a_1, a_2 i a_3 i wypisać je w kolejności **malejącej**.

(8 pt.) Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i że ta granica jest różna od 0.

Rozwiązanie: Ponieważ $3\cdot 1+1=4=6\cdot 1-2$, więc a_1 jest sumą **jednego** składnika: $a_1=\frac{1}{4}$. $a_2=\frac{1}{3\cdot 2+1}+\frac{1}{3\cdot 3+1}=\frac{1}{7}+\frac{1}{10}=\frac{17}{70}<\frac{17}{68}=\frac{1}{4}=a_1$. $a_3=\frac{1}{3\cdot 3+1}+\frac{1}{3\cdot 4+1}+\frac{1}{3\cdot 5+1}=\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}=$ $=\frac{104+80+65}{1040}=\frac{249}{1040}<\frac{250}{1040}=\frac{25}{104}=\frac{1750}{7280}<\frac{1768}{7280}=\frac{17}{70}=a_2$. Trzy pierwsze wyrazy ciągu w kolejności malejącej to $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{17}{70}$ i $a_3=\frac{25}{104}$.

Jasne jest, że liczba a_n jest sumą n składników: różnica mianowników jest równa 3, zaczynamy od $3n+1$ i kończymy na $6n-2$, więc tych mianowników jest $1+\frac{6n-2-(3n+1)}{3}=$ $=1+\frac{3n-3}{3}=1+n-1=n$. Najmniejszym składnikiem tej sumy jest $\frac{1}{6n-2}$, więc $a_n\ge n\cdot\frac{1}{6n-2}>n\cdot\frac{1}{6n}=\frac{1}{6}$. **Jeśli** więc ciąg (a_n) ma granicę, to nie jest ona mniejsza niż $\frac{1}{6}$. Mamy $a_{n+1}=\frac{1}{3(n+1)+1}+\frac{1}{3(n+1)+4}+\frac{1}{3(n+1)+7}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+4}$ (oczywiście $6n+4=6(n+1)-2$). Wynika stąd, że

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+4}-\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{6n+2}+\frac{1}{6n+4}-\frac{1}{6n+2}=\frac{1}{(6n+1)(6n+2)}-\frac{2}{(6n+4)(6n+2)}=$

$=\frac{-6n+2}{(6n+1)(6n+2)(6n+4)} < 0$. Wykazaliśmy, że $a_{n+1} < a_n$ dla $n = 1,2,3,\ldots$. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest ściśle malejący, a ponieważ wszystkie jego wyrazy są większe od $\frac{1}{6}$, więc ma granicę i jest nią jakaś liczba większa lub równa $\frac{1}{6}$.

Jeśli człowiek trochę się pomęczy z różnymi nierównościami, które występowały na zajęciach, to może tę granicę znaleźć, ale zapewne nie w czasie kolokwium (z powodu braku czasu). W dalszej części wykładu pojawi się twierdzenie, dzięki któremu można będzie znaleźć ją dosyć szybko. Zdradzę jej wartość: $\frac{1}{3}\ln 2 = \ln\sqrt[3]{8} \approx 0{,}2310490602$.

---

4. (10 pt.) Znaleźć pochodne następujących funkcji: $x^{\sin 2x}$, $\operatorname{arctg}(\cos x)+\operatorname{arctg}(\frac{1}{\cos x})$ określonych na przedziale $(0,\frac{\pi}{4})$.

Rozwiązanie: Mamy $\big(x^{\sin 2x}\big)' = \big(e^{\ln x\cdot\sin 2x}\big)' \xlongequal[\text{złożenia}]{\text{pochodna}} e^{\ln x\cdot\sin 2x}\big(\ln x\cdot\sin 2x\big)' \xlongequal[\text{iloczynu}]{\text{pochodna}}$

$$= x^{\sin 2x}\big(\tfrac{1}{x}\cdot\sin 2x + \ln x\cdot 2\cos 2x\big).$$

Przypomnijmy, że $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ — było na wykładzie, wynika też łatwo z wzoru na pochodną funkcji złożonej: $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, więc

$$1 = (x)' = \big(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\big)' \xlongequal[\text{złożenia}]{\text{pochodna}} \big[1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)\big]\cdot(\operatorname{arctg} x)' = [1+x^2]\cdot(\operatorname{arctg} x)'.$$

Mamy teraz $\big(\operatorname{arctg}(\cos x)+\operatorname{arctg}(\frac{1}{\cos x})\big)' \xlongequal[\text{złożenia}]{\text{pochodna}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\cdot(\cos x)' + \frac{1}{1+1/\cos^2 x}\big(\frac{1}{\cos x}\big)' =$ $=\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+1/\cos^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = 0$. Wynik można było uzyskać bez żadnych rachunków. Można było zauważyć, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$ i $0 \le \alpha,\beta < \frac{\pi}{2}$, to $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, starczy przypomnieć sobie definicję funkcji trygonometrycznych. U nas $\alpha = \operatorname{arctg}(\cos x)$, wtedy $\operatorname{tg}\alpha = \cos x$ oraz $\beta = \operatorname{arctg}(\frac{1}{\cos x})$, zatem $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\cos x}$. Różniczkowaliśmy więc funkcję stałą. Oczywiście na początku nauki szanse na to, że ktoś pomyśli o takim rozwiązaniu są minimalne, na to ma szanse tylko ktoś, kto ma sporą wprawę i kto ma zwyczaj zastanawiać się nad tym, czy rachunków nie można jakoś ominąć.

---

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x(3-x^2)} = \sqrt[3]{3x-x^3}$.

(3 pt.) W jakich punktach funkcja f nie ma skończonej pochodnej (tzn. jest nieróżniczkowalna)? Odpowiedź należy uzasadnić.

(4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca.

(3 pt.) Korzystając z uzyskanych rezultatów naszkicować wykres funkcji f. **Nie** badać wypukłości, **nie** szukać asymptot ...

Rozwiązanie: Mamy (znów ćwiczymy pochodną złożenia)

$f'(x) = \big(\sqrt[3]{3x-x^3}\big)' = \Big(\big(3x-x^3\big)^{1/3}\Big)' = \frac{1}{3}\cdot\big(3x-x^3\big)^{-2/3}\cdot(3-3x^2) = \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$. Jasne jest, że mianownik jest zawsze nieujemny, więc nie ma wpływu na znak pochodnej. Mamy też $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{1-x^2}{\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}} = -\infty$, bo licznik dąży do -2, a mianownik jest **dodatni** i dąży do 0. Wobec tego $f'(\sqrt{3}) = -\infty$. Analogicznie $f'(-\sqrt{3}) = -\infty$. Mamy też $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}} = \infty$, więc $f'(0) = +\infty$. Pochodna jest dodatnia, na przedziale $(-1,1)$, więc funkcja jest ściśle rosnąca na przedziale $[-1,1]$. Na każdej z półprostych $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ pochodna jest ujemna (to dotyczy też punktów $\pm\sqrt{3}$, w których pochodna nie jest skończona!), więc funkcja jest ściśle malejąca na każdej z półprostych $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$. Można jeszcze zauważyć, że $f(-1) = -\sqrt[3]{2}$ i $f(1) = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. Oczywiście przybliżanie liczby $\sqrt[3]{2}$ w czasie kolokwium wymagane nie było, istotne było jedynie to, że $\sqrt[3]{2} > 1$, co każdy **student** widzi natychmiast.

---

6. (3 pt.) Przez punkty $A = (1, 8)$ i $X = (x, 0)$, gdzie $x > 1$, przechodzi prosta, która przecina oś OY w punkcie $Y = (0, y)$. Wyznaczyć liczbę y w zależności od współrzędnej x punktu X.

(7 pt.) Niech X i Y oznaczają punkty opisane w poprzedniej części zadania. Znaleźć najkrótszy z odcinków XY.

Rozwiązanie: Niech $O = (0, 0)$, $B = (1, 0)$. Trójkąty ABX i YOX są podobne (Szanowny Czytelniku, trzeba sobie narysować coś na kartce!), więc $\frac{AB}{BX} = \frac{YO}{OX}$, czyli $\frac{8}{x-1} = \frac{y}{x}$. Stąd $y = \frac{8x}{x-1} = \frac{8(x-1)+8}{x-1} = 8 + \frac{8}{x-1}$. Niech $d(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (8 + \frac{8}{x-1})^2}$ i niech $f(x) = \big(d(x)\big)^2 = x^2 + (8 + \frac{8}{x-1})^2$. Znajdziemy najmniejszą wartość funkcji f, a potem znajdziemy pierwiastek z tego wyniku, czyli najmniejszą wartość funkcji d. Tak wolno postąpić, bo im większa liczba podpierwiastkowa, tym większy pierwiastek z niej. Obliczamy pochodną: $f'(x) = 2x + 2(8 + \frac{8}{x-1}) \cdot \frac{-8}{(x-1)^2} = 2x - 2 \cdot \frac{8x}{x-1} \cdot \frac{8}{(x-1)^2} = 2x\big(1 - \frac{64}{(x-1)^3}\big)$. Ta pochodna jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x - 1 = 4$ — interesują nas wyłącznie liczby $x > 1$! Jasne jest, że jeśli $x > 5$, to $f'(x) > 0$, zatem na półprostej $[5, \infty)$ funkcja f jest ściśle rosnąca. Jeśli $1 < x < 5$, to $f'(x) < 0$, a z tego wynika, że na przedziale $(1, 5]$ funkcja f jest ściśle malejąca. Z tych dwóch zdań wnioskujemy, że najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje w punkcie 5. Ta najmniejsza wartość równa jest $5^2 + \big(8 + \frac{8}{5-1}\big)^2 = 125$. Wobec tego najkrótszy z odcinków, którymi byli zmuszeni się Państwo interesować w czasie kolokwium ma długość $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$; jego końcami są punkty $(5, 0)$ i $(0, 10)$.
